INTRODUCERE

LA

TEORIA ECUAȚIUNILOR INTEGRALE

DE

TRAIAN LALESCU

PROFESOR LA ȘCOALA NAȚIONALĂ DE PODURI ȘI ȘOSELE.
DOCENT LA UNIVERSITATE.

ACADEMIA
BIBLIOTECA
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

BUCUREȘTI
—
IMPRIMERIA STATULUI
1911

www.digibuc.ro

INTRODUCERE

LA

TEORIA ECUAȚIUNILOR INTEGRALE

DE

TRAIAN LALESCU

PROFESOR LA ȘCOALA NAȚIONALĂ DE PODURI ȘI ȘOSELE.
DOCENT LA UNIVERSITATE.

BUCUREȘTI

IMPRIMERIA STATULUI

1911

www.digibuc.ro

INTRODUCERE LA TEORIA ECUAȚIUNILOR INTEGRALE

INTRODUCERE

1. De vre-o zece ani încoace studiul unei clase de ecuații funcționale a luat o desvoltare așà de mare și s'a arătat așà de rodnic în consecințe importante și diverse în cât putem spune cu siguranță că în curând el va formà unul din capitolele cele mai frumoase ale analizei. Acest capitol se găsește în plină perioadă de construcțiune ; de aceea am crezut că este util de a strânge la un loc rezultatele obținute până acum și de a indicà direcțiunile cari au rămas încă deschise cercetătorilor.

Toate chestiunile pe cari le vom tratà sunt cazuri particulare ale problemei următoare :

Să introducem o *nouă operațiune* efectuată asupra funcțiunii $\varphi(x)$ și definită prin expresiunea :

$$(1) \qquad \int_{\widehat{ab}} N(xs)\varphi(s)ds$$

Această operațiune e perfect definită dacă se dă drumul de integrare *ab*, funcțiunea N (xy) pe care o vom numì sâmburele operațiunii și dacă integrala definită (1) are un sens. Să considerăm acum o relațiune oarecare între $\varphi(x)$, derivatele sale de diferite ordine și un număr oarecare de operații (1) și să ne propunem a găsì o funcțiune care să verifice o asemenea relațiune.

Avem afface cu un nou gen de ecuații mai generale ca ecuațiunile diferențiale fiindcă conțin o operație care în cazul general este esențial diferită ; le vom da numirea generală de *ecuații integrale*.

După această definiție o ecuație diferențială care conține o o-

www.digibuc.ro

peraţie integrală (1) va fi o ecuaţie integrală; operaţia de diferenţiare rămâne în al doilea plan faţă de noua operaţiune, întocmai ca operaţiile de rezolvare a ecuaţiilor ordinare, algebrice sau transcendente, faţă de operaţia de diferenţiare.

Problema generală pe care o avem în vedere este rezolvarea ecuaţiilor integrale.

Din punct de vedere istoric, prima ecuaţie integrală rezolvată a fost:

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^\alpha} = F(x) \quad (0<\alpha<1)$$

întâlnită şi rezolvată de Abel în 1812 într'o problemă elementară de mecanică.

Mult timp după aceea, un matematician rus *N. Sonine* în 1884 reluă studiul unei ecuaţii de aceeaş formă ca aceea a lui Abel, însă ceva mai generală, considerând cazul

$$N(xy) = \frac{G(xy)}{(x-y)^\alpha}$$

chestiunea pare închisă, fiindcă artificiul lui Abel era oarecum epuizat de Sonine, când în 1896, D-l *V. Volterra* într'o serie de note prezentate Academiilor de ştiinţe din Turin şi Roma, reluă cu un succes complect şi cu ajutorul unei metode fecunde studiul general al ecuaţiei integrale.

$$\int_0 N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

Frumoasele rezultate obţinute au fost imediat urmate în 1900 de o lucrare strălucită datorită D-lui *I. Fredholm* asupra ecuaţiunii:

$$\varphi(x) + \int N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

a cărei importanţă în analiză a fost pusă în lumină de D-nii *I. Fredholm*, *D. Hilbert* şi *E. Picard*. De atunci lucrările se urmează fără întrerupere. Intr'o serie de comunicări prezentate societăţii ştiinţifice din Göttingen, d-l D. Hilbert întrebuinţează ca element de demonstraţie rezolvarea unei anumite clase de ecuaţii lineare cu o infinitate de variabile, pune în lumină printr'un stu-

www.digibuc.ro

diu aprofundat rolul simetriei sâmburelui şi studiază aplicaţiunile cele mai importante.

In acelaş timp, d-l E. Picard semnalează importanţa acestei ecuaţiuni integrale arătând numeroasele sale aplicaţiuni în Fizica matematică.

Ne mărginim deocamdată la aceste linii esenţiale relative la istoricul chestiunii; în corpul lucrării vom da la locurile cuvenite toate indicaţiunile istorice şi bibliografice necesare.

Vom spune că o ecuaţie integrală este *lineară* dacă ea e de gradul întâi în raport cu operaţiile integrale pe cari le conţine.

Tipurile:

$$(3) \qquad \int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

$$(3') \qquad \varphi(x) + \int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

în care una cel puţin din limitele integralei este variabilă vor fi numite *ecuaţiuni integrale lineare de tipul Volterra* sau mai simplu *ecuaţiile lui Volterra;* vom spune că ecuaţia (3) e de prima speţă, iar (3') de speţa doua.

$$(4) \qquad \int_a^b N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

$$(4') \qquad \varphi(x) + \int_a^b N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

vor fi numite *ecuaţiuni integrale lineare de tipul Fredholm* sau mai simplu *ecuaţiile lui Fredholm;* în mod analog (4) e de prima speţă, iar (4') de speţa doua.

Aceste tipuri caracterizează noile elemente analitice; în jurul lor se poate construi teoria celorlalte cazuri lineare întâlnite în aplicaţii şi studiate succesiv de diferiţi autori.

Vom împărţi lucrarea noastră în patru părţi. In prima parte vom expune teoria ecuaţiei lui Volterra; partea doua va fi consacrată ecuaţiunii lui Fredholm, iar partea a treia va tratà despre ecuaţiile integrale singulare. In sfârşit în partea patra vom schiţà rezultatele obţinute până acum asupra ecuaţiunilor integrale *neliniare.*

www.digibuc.ro

PARTEA I

ECUAȚIA LUI VOLTERRA

I. – STADIUL EMBRIONAR

1. Lucrările d-lui Volterra au apărut de la 1896 în 4 note, prezentate Academiei din Turin [1]), două aceleia din Roma [2]) și un memoriu de ansamblu inserat în *Annali di Matematica* [3]). Este esențial de a pune mai întâiu în lumină ideea care a călăuzit pe d-l V. Volterra în cercetările sale; în acest capitol nu va fi vorba decât despre funcțiuni finite și integrabile.

Să presupunem variabilele reale și limitate într'un interval finit, de ex.: intervalul (0,1). Să considerăm punctele de diviziune:

$$(1) \qquad \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$$

și să exprimăm că ecuația

$$(2) \qquad \int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

este verificată în aceste puncte, înlocuind integrala prin sumele apropiate corespunzătoare punctelor de diviziune (1). Obținem astfel ecuațiunile apropiate:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{n} N_{11}\varphi_1 = F_1 \\ &\frac{1}{n}\left[N_{21}\varphi_1 + N_{22}\varphi_2\right] = F_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{1}{n}\left[N_{n1}\varphi_1 + \ldots + N_{nn}\varphi_n\right] = F_n \end{aligned}$$

însemnând pentru prescurtare $N_{pq} = N\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \varphi_p = \varphi\left(\frac{p}{n}\right)$ et $F_p = F\left(\frac{p}{n}\right)$.

[1]) V. VOLTERRA. Sulla inversione degli integrali definiti (Atti della reale Acc. della Scienze di Torino) 12 Ianuarie, 8 Martie, 26 Aprilie 1896, pag. 311, 400, 557, 693.

[2]) V. VOLTERRA. Rendiconti della reale Accademia dei Lincei (1° Sem. 1896, pag. 177, 289).

[3]) V. VOLTERRA. Sopra alcuni questioni di inversioni di integrali definiti (Seria 2-a, t. 25, 1897, pag. 165).

www.digibuc.ro

Am obţinut astfel un sistem foarte simplu de n ecuaţii cu n necunoscute cari ne permit să calculăm *succesiv* valorile apoximative ale funcţiunii necunoscute în punctele (1). Exactitatea acestor valori creşte cu n; trecând deci la limită, căpătăm o infinitate continuă de necunoscute, cari sunt tocmai diferitele valori ale funcţiunii $\varphi(x)$ în intervalul (0,1).

Odată acest rezultat obţinut, o verificare este necesară. Această metodă constructivă prezintă o analogie completă cu aceea care conduce la noţiunea de integrală, unde de asemenea e necesară o verificare. Ea descoperă două caractere fundamentale ale problemei:

Prezenţa unui *mecanism de aproximaţii succesive* şi introducerea *condiţiunii* $N(x,x) \neq 0$.

Nu cunoaştem în toate detaliile metoda d-lui V. Volterra care s'a mărginit a desvoltà verificările necesare. Procedeul său laborios dă o aparenţă misterioasă rezultatelor sale; deşi are darul de a reînvià practicele vechilor analişti, el nu mulţumeşte pe deplin spiritul.

In această lucrare vom întrebuinţà direct metoda aproximaţiunilor succesive după indicaţiunile d-lui E. Picard[1]).

II. — TEOREMA D-lui VOLTERRA

2. Să luăm variabilele reale şi să presupunem că sâmburele şi $F(x)$ sunt funcţiuni odată derivabile într'un interval oarecare (0, a). Dacă derivăm relaţiunea (2) obţinem:

$$N(xx)\varphi(x) + \int_0^x N_x'(xs)\varphi(s)ds = F'(x). \tag{4}$$

Dacă $N(x\,x)$ nu se anulează în intervalul (O, a), putem împărţì această relaţiune prin $N(x\,x)$, ceeace ne dă o ecuaţie de forma

$$\varphi(x) + \int_0^x N_1(xs)\varphi(s)ds = F_1(x). \tag{5}$$

Această formă este foarte favorabilă pentru aplicarea aproximaţiunilor succesive; să introducem un parametru λ înaintea înte-

---

[1]) T. Lalesco. Sur l'équation de Volterra. (Jl. de math. pures et appliquées 1908).

www.digibuc.ro

gralei primului membru şi să căutăm a satisface ecuaţiei (5) printr'o desvoltare de forma

$$(6) \qquad \varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots$$

$\varphi_0(x)\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots$ fiind diferitele aproximaţii succesive pe cari trebuie să le determinăm. Identificarea ne dă imediat relaţiunile

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\varphi_0(x) = F_1(x) \\ &\varphi_1(x) = -\int_0^x N_1(xs)\varphi_0(s)ds. \\ &\ldots\ldots \\ &\varphi_n(x) = -\int_0^x N_1(xs)\varphi_{n-1}(s)ds. \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

care ne permit să calculăm într'un mod succesiv diferitele aproximaţiuni.

Seria aproximaţiunilor (7) convergează uniform în intervalul (o, a). Intr'adevăr fie M şi N modulele maxime ale funcţiunilor $F_1(x)$ et $N_1(xs)$ în acest interval; avem evident inegalităţile:

$$(7') \qquad \begin{aligned} &|\ \varphi_0(x)\ | < M \\ &|\ \varphi_1(x)\ | < MNx \\ &\ldots\ldots \\ &|\ \varphi_n(x)\ | < \frac{MN^n x^n}{n!} \end{aligned}$$

Ele ne arată că seria (6) reprezintă o funcţiune întreagă de λ, de ordin cel mult egal cu 1; ea convergează deci absolut şi uniform în intervalul considerat.

Seria (6) fiind uniform convergentă în raport cu x, integrala care figurează în ecuaţia (5) are un sens perfect de bine determinat; pe de altă parte această serie verifică formal ecuaţiunea (5) şi e absolut convergentă. Ea va fi, prin urmare, o soluţie finită şi bine determinată a ecuaţiei (5).

Putem demonstrà acum că această soluţiune este şi singura soluţiune finită a ecuaţiei (2). Intr'adevăr dacă ar mai există încă una, ecuaţia (5) fără membru al doilea.

$$(8) \qquad \varphi(x) + \int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = 0.$$

www.digibuc.ro

ar avea o soluţiune neidentic nulă, ceeace e imposibil, fiindcă din (7) şi (8) se deduce prin scădere

$$\varphi(x) - \varphi^n(x) = -\int_0^x N_1(xs)[\varphi(s) - \varphi_{n-1}(s)]ds.$$

Se obţin deci inegalităţi identice cu (7') în care trebuie numai să înlocuim pe $\varphi_n(x)$ prin $\varphi(x) - \varphi_n(x)$. In virtutea raţionamentului precedent rezultă că expresiunea

$$\lambda^n[\varphi(x) - \varphi_n(x)]$$

este termenul general al unei serii, funcţiune întreagă de λ şi, prin urmare

$$\lim_{n=\infty}[\varphi(x) - \varphi_n(x)] = 0.$$

De la ecuaţia (5) sau (4) ne ridicăm iarăş la ecuaţia (2) printr'o integrare, ceeace ne dă:

$$(9) \qquad \int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x) - F(0).$$

Ecuaţia (2) nu admite deci soluţia $\varphi(x)$ decât dacă $F(0) = 0$, condiţiune necesară şi evident suficientă [1]).

Am obţinut astfel teorema următoare:

Dacă $N(xy)$ *şi* $F(x)$ *sunt funcţiuni odată derivabile în raport cu* x *în intervalul* $(0,a)$ *şi dacă* $N(xx) \neq 0$ şi $F(0)=0$, *ecuaţia lui Volterra de prima speţă.*

$$\int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

admite o singură soluţie finită şi continuă în acest interval.

3. Dacă considerăm ecuaţia lui Volterra *de a doua speţă*,

$$(10) \qquad \varphi(x) + \lambda\int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

Condiţiunile restrictive ale teoremei precedente nu mai sunt evident necesare. Ecuaţia cea mai simplă este deci aceasta; am păstrat cu toate acestea terminologia D-lui D. Hilbert, pentru a evită orice confuzie.

[1]) Această teoremă a fost stabilită pentru întâia oară de d-l I. le Roux în teza sa de doctorat *Asupra integrale or ecuaţiunilor liniare cu derivate parţiale de ordinul al doilea cu 2 variabile independente* (pag. 19—22) 1894.

www.digibuc.ro

III. FORMULA D-LUI V. VOLTERRA; SÂMBURELE RESOLVANT

4. Se poate scrie $\varphi(x)$ mai simplu în modul următor:

Dacă considerăm ecuația de speța a doua (10):

$$\varphi_0(x) = F(x)$$

$$\varphi_1(x) = -\int_0^x N(x\sigma)F(\sigma)d\sigma$$

$$\varphi_2(x) = (-1)^2\int_0^x N(xs)ds\int_0^s N(s\sigma)F(\sigma)d\sigma$$

sau aplicând o formulă bine cunoscută a lui Dirichlet:

$$\varphi_2(x) = (-1)^2\int_0^x F(\sigma)d\sigma\int_\sigma^x N(xs)N(s\sigma)\,ls = \int_0^x N_1(x\sigma)F(\sigma)d\sigma$$

însemnând pentru prescurtare:

$$N_1(xy) = \int_y^x N(xs)N(sy)ds$$

In mod general:

$$\varphi_n(x) = (-1)^n\int_0^x N(xs)ds\int_0^s N_{n-1}(s\sigma)F(\sigma)d\sigma$$

$$= (-1)^n\int_0^x F(\sigma)d\sigma\int_\sigma^x N(xs)N_{n-2}(s\sigma)ds$$

$$= (-1)^n\int_0^x N_{n-1}(x\sigma)F(\sigma)d\sigma$$

unde în mod general avem:

$$N_n(xy) = \int_0^x N_1(xs)N_{n-1}(sy)ds$$

Dacă însemnăm deci:

$$\Gamma(xy) = N(xy) - \lambda N_1(xy) + \ldots + (-1)^p\lambda^p N_p(xy) + \ldots$$

vedem că soluțiunea ecuațiunii (5) sau (10) se poate scrie sub forma:

$$\varphi(1) = F(x) - \lambda\int_0^x \Gamma(xs\lambda)F(s)ds \qquad (11)$$

Ea se prezintă sub o formă analoagă cu membrul întâi al ecuației (5); vom spune pentru aceasta că $\Gamma(xy\lambda)$ este sâmburele rezolvant al ecuației (10).

Sâmburii $N_p(xy)$ joacă și ei un rol important în teoria ecuațiunilor integrale; ei poartă numele de sâmburii *iterați*.

www.digibuc.ro

Rezultatul obţinut se poate rezumà în teorema următoare:

Ecuaţia lui Volterra de speţa doua are o singură soluţiune finită şi continuă dată de formula (11). Această soluţiune e o funcţiune întreagă de λ *de ordin cel mult egal cu* 1.

Ecuaţia lui Volterra de speţa doua nu este rezolubilă în domeniul finit şi real decât în anumite condiţiuni.

IV. – LEGĂTURA DINTRE ECUAŢIA LUI VOLTERRA ŞI ECUAŢIILE DIFERENŢIALE LINIARE

5. Există o strânsă legătură între ecuaţia lui Volterra şi ecuaţiile diferenţiale liniare, care e necesar a fi pusă în evidenţă.

Putem mai întâiu *reduce orice ecuaţie diferenţială lineară la o ecuaţie a lui Volterra.* Să considerăm într'adevăr ecuaţia de ordinul n.

$$(12)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

şi să luăm ca funcţiune necunoscută în locul lui y, derivata de ordinul cel mai înalt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = z$$

vom aveà

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x z\,dx + C_1$$

$$\ldots\ldots$$

$$y = \int_0^x z\,dx^n + C_1\frac{x^n}{n!} + C_2\frac{x^{n-1}}{n-1!} + \ldots C_n,$$

cari transformă (12) în

$$(13)\quad z + a_1(x)\int_0^x z\,dx + \ldots + a_n(x)\int_0^x z\,dx^n = f(x) + \sum_{p=1}^{n} C_p f_p(x),$$

însemnând în general

$$f_p(x) = a_p(x) + \int_1^x a_{p+1}(x) + \ldots + \frac{x^{n-p}}{n-p!}a_n(x).$$

E de ajuns acum a aplicà formula cunoscută

$$\int_{0\,(n)}^{x} \varphi(s)\,ds^n = \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(s)\,ds$$

www.digibuc.ro

pentru a obține astfel ecuația lui Volterra

$$z+\int_o^x\left[a_1(x)+a_2(x)(x-s)+\ldots.+a_n(x)\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\varphi(s)ds = f(x)+\sum_{p=1}^{n}c_pf_p(x). \tag{14}$$

Am presupus, bine înțeles, că origina este un punct regulat pentru coeficienții $a_i(x)$. Să observăm, în treacăt, că proprietățile elementare ale ecuațiilor diferențiale lineare, cu sau fără membru al doilea, decurg imediat din teorema precedentă.

Pentru ca membrul al doilea din (14) să aibă o valoare perfect determinată, trebuie ca constantele C_i să aibă valori date. Deci, *invers*, rezolvarea unei ecuații a lui Volterra (14) este echivalentă cu rezolvarea unei *probleme a lui Cauchy* pentru ecuația diferențială lineară (12). Unicitatea soluțiunii în teoria ecuației lui Volterra corespunde faptului că problema lui Cauchy nu admite, într'un punct regulat, decât o singură soluțiune.

6. Vom obține un rezultat interesant care ne va lămuri natura analitică a ecuației lui Volterra, făcând $n=\infty$ în ecuația diferențială (13). Căpătăm, astfel, ecuația diferențială lineară *de ordin infinit*.

$$z+a_1(x)\int_o^x zdx+a_2(x)\int_o^x zdx^2+\ldots+a_n(x)\int_o^x zdx^n+\ldots=f(x)+\sum_{p=1}^{\infty}C_pf_p(x),$$

în care

$$f_p(x)=\sum_{r=o}^{\infty}a_{p+r}(x)\frac{x^r}{r!}$$

care e echivalentă cu ecuația lui Volterra.

$$z+\int_o^x\left[a_1(x)+a_2(x)\frac{(x-s)}{1}+\ldots.+\frac{a_n(x)(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots.\right]\varphi(s)ds=f(x)+\sum_{p=1}^{\infty}c_pf_p(x). \tag{15}$$

www.digibuc.ro

Să presupunem că funcţiunile $a_p(x)$ sunt toate finite în intervalul (oa) şi că într'un mod mai precis avem

$$a_p(x) < A_p.$$

atunci vom avea

$$| f_p(x) | < e^{A_p x}.$$

Dacă, deci, seria

$$\sum_{p=1}^{\infty} C_p e^{A_p x}$$

e convergentă, suma membrului al doilea (15) reprezintă o serie absolut şi uniform convergentă în intervalul (oa); vom fi în particular, în acest caz, dacă $\sum_{p=1}^{\infty} C_p$ este convergentă. Să observăm, în sfârşit, în acelaş mod că seria care dă sâmburele lui (15) e de asemenea o serie uniform şi absolut convergentă în acelaş interval.

Această trecere la limită ne arată deci că, în unele cazuri, ecuaţia lui Volterra este echivalentă cu rezolvarea unei probleme a lui Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială lineară de ordin infinit, ceeace e de ajuns pentru a ne da seama de rolul şi natura acestui nou instrument analitic.

V. — ECUAŢIA LUI VOLTERRA CU MAI MULTE VARIABILE INDEPENDENTE

7. Ecuaţiile lui Volterra cu mai multe variabile independente sunt tot aşà de importante ca acelea cu o singură variabilă din cauza aplicaţiunilor lor în teoria ecuaţiunilor cu derivate parţiale şi cu caracteristice reale. Vom studià tipul următor :

$$(16) \quad \varphi(xy) + \int_o^x A(xy;s)\, \varphi(sy)ds + \int_o^y B(xy;s)\, \varphi(xs)\, ls + \int_o^x \int_o^y C(xy;st)\, \varphi(st)dsdt = F(xy),$$

care corespunde ecuaţiei de speţa doua din paragrafele precedente.

Funcţiunile A(xyz) B(xyz) şi C(xyz) sunt prin ipoteză finite şi $<M$, iar $F(xy)<F$ şi integrabile într'un domeniu oarecare D al argumentelor lor.

www.digibuc.ro

Pentru a găsi o soluțiune a ecuației (16) vom aplică metoda aproximațiilor succesive luând

$$\varphi_1(xy) = F(xy).$$

$$\varphi_2(xy) = -\int_0^x A(xys)\,\varphi_1(sy)ds - \int_0^x B(xys)\,\varphi_1(xs)ds -$$

(17) $$\int_0^x\int_0^x C(xyst)\varphi_1(St)dsdt = D\varphi_1(xy).$$

. . . . .

$$\varphi_n(xy) = D\varphi_{n-1}(xy).$$

In dreptunghiul (1) de laturi α și β, cuprins în D, vom aveà:

$$|\varphi_1(xy)| < F.$$
$$|\varphi_2(xy)| < MF(x+y+xy) < MF(\alpha+\beta+\alpha\beta).$$
$$|\varphi_3(xy)| < M^2F(\alpha+\beta+\alpha\beta)(x+y+xy) < M^2F(\alpha+\beta+\alpha\beta)^2$$
. . . .

și, în general

$$|\varphi_n(xy)| < FM^n(\alpha+\beta+\alpha\beta)^n.$$

Rezultă de acì că seria aproximațiilor converge complet [1]) în dreptunghiul (1) dacă vom luà pe α și β suficient de mici, așa că:

$$M(\alpha+\beta+\alpha\beta) < 1.$$

Obținem astfel o soluțiune, de altfel singura în dreptunghiul (1) în virtutea unui raționament dejà repetat.

Pentru a *prelungì* această soluțiune în tot domeniul D, să considerăm dreptunghiul (2) situat la dreapta dreptunghiului (1) și având aceleași dimensiunl. Dacă facem schimbarea de variabile $x = \alpha + x'$ și $y = y'$, ecuația (16) se poate pune sub forma

(18) $$\varphi(x'y') + \int_0^{x'} A(x'y's)\varphi(sy')ds + \int_0^{y'} B(x'y's)\varphi(x's)ds +$$
$$\int_0^{x'}\int_0^{y'} C(x'y'st)\varphi(st)dsdt = F + \Phi$$

membrul întâi având aceeaș formă ca (16), iar Φ fiind o funcțiune ușor de determinat care depinde și de valorile lui $\varphi(xy)$ în dreptunghiul (1) acum cunoscute noă. Vom puteà deci aplicà acelaș mecanism de aproximații succesive, înlocuind pe F prin $F+\Phi$;

[1]) Vom spune adesea «complect», în loc de «uniform și absolut».

www.digibuc.ro

aproximațiile astfel obținute vor converge cu siguranță în (2), de oarece membrul întâi al ecuației (16) rămânând invariabil, constanta M a rămas aceeaș; vom puteà deci, după un număr *finit* de operațiuni să parcurgem tot domeniul D cu ajutorul acestui dreptunghiu de dimensiuni invariabile (α,β); obținem astfel teorema următoare:

Ecuația (16) are o singură soluție finită în tot domeniul în care funcțiunile A(xyz), C(x,y,z,t) și F (xy) sunt finite și integrabile.

8. D-l Volterra consideră de asemenea și cazul ecuației de prima speță:

$$(19) \qquad \int_0^x\int_0^y N(xy;\,st)\,\varphi(st)\,lsdt=F(xy)$$

Să însemnăm

$$N(xyst)=N(xy)+N_1(xys)\,(x-s)+N_2(xyt)\,(y-t)+N_3(xyst)\,(x-s)\,(y-t)$$

Ecuația (19) se scrie atunci:

$$N(xy)\int_0^x\int_0^y\varphi(st)dsdt+\int_0^x\int_0^y N_1(xys)\,(x-s)\varphi(st)ds+\int_0^x\int_0^y N_2(xys)\,(y-t)\varphi(st)dt+\int_0^x\int_0^y N_3(xyst)(x-s)(y-t)\varphi(st)dsdt=F(xy)$$

Luând ca necunoscută funcțiunea

$$\varphi_1(xy)=\int_0^x\int_0^y\varphi(st)dsdt$$

ecuația (19) devine

$$\overline{N(xy)}\varphi_1(xy)+\int_0^z\overline{N}_1(xys)\varphi_1(sy)ds+\int_0^y\overline{N}_2(xys)\varphi_1(xs)ds+\int_0^x\int_0^y\overline{N}_3(xyst)\varphi_1(st)dsdt=F(xy)$$

Divizând prin $\overline{N(xy)}$ se obține o ecuație de speța doua. De oarece $\varphi_1(o,o)=o$ este necesar ca și $F(o,o)=o$; de asemenea condițiunea $\overline{N}(xy)=N(xy;\,xy)\neq o$ intervine de asemenea ca condițiune necesară și suficientă pentru ca coeficienții ecuației de speța doua să fie finiți. Obținem deci pe altă cale aceleași particularități ca și la ecuația lui Volterra cu o singură variabilă.

www.digibuc.ro

VI. — SISTEMELE DE ECUAȚII A LUI VOLTERRA

9. Metoda aproximațiilor succesive permite să tratăm tot așa de simplu și un sistem de n ecuații liniare a lui Volterra de speța doua cu n funcțiuni necunoscute. Vom numi astfel un sistem de tipul

$$\varphi_i(x)+\sum_{p=1}^{n}\int_0^x A_{ip}(xs)\varphi_p(s)ds=f_i(x) \qquad (i=1...n)$$

Aplicarea metodei e evidentă; primele aproximații vor fi $\varphi_{io}(x)=f_i(x)$, iar ecuațiile de recurență vor fi:

$$\varphi_{ik}(x)=-\sum_{p=1}^{n}\int_0^x A_{ip}(xs)\underset{p,k-1}{\varphi}(s)ds \qquad (i=1, ...n)$$

Același procedeu, întrebuințat până acum de mai multe ori, ne arată că seriile de aproximații converg complet în tot domeniul de existență al coeficienților $A_{pk}(xy)$.

10. Se poate reduce imediat un sistem de ecuații diferențiale lineare de ordin finit de tipul

$$\frac{dz_i}{dx}+\sum_{p-1}^{n}a_{ip}(2)z_p(x)=f_i(x) \qquad (i=1, ...n)$$

la un sistem le ecuații a lui Volterra luând ca necunoscute $\frac{dzi}{dx}=u_i$.

Se pot de asemenea considerà sisteme de ecuații lineare de ordin infinit cărora li se poate aplicà același procedeu, având în vedere numai ca condițiunile inițiale să asigure convergența primilor membrii ai ecuației considerate.

VII. — OBSERVĂRI FINALE

11. Din cele precedente s'a putut constatà puterea admirabilului instrument analitic pe care îl constitue metoda aproximațiilor succesive și fecunditatea sa variată în toate chestiunile de existență relative la ecuațiile diferențiale lineare și la ecuațiile integrale lineare. cari sunt după cum am văzut, o adevărată generalizare a celor dintâiu.

Ecuațiile integrale tratate până acum se pot numì *regulate;* o parte specială va fi consacrată ecuațiilor integrale *singulare* unde vom tratà în același timp și ecuațiile singulare ale lui Fredholm.

www.digibuc.ro

PARTEA II

ECUAȚIA LUI FREDHOLM

CAP. I

FORMULELE D-LUI FREDHOLM

I. — STADIUL EMBRIONAR; ISTORIC

1. Ecuația lui Fredholm de speța a doua e un exemplu foarte instructiv de descoperire matematică; ea întrunește toate caracteristicile esențiale atât prin noutatea chestiunii cât și prin îndrăzneala unei treceri la limită, considerată cu drept cuvânt de d-nii G. Darboux și E. Picard ca una din cele mai frumoase din analiză. Este de aceea interesant a schița în liniile sale generale, evoluția acestei memorabile descoperiri.

Să considerăm ecuațiunea:

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 N(xs)\varphi(s)ds = f(x) \tag{1}$$

și punctele de diviziune:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-1}{n} \tag{2}$$

și să înlocuim integrala (1) prin suma apropiată corespunzătoare punctelor de diviziune (2), ceeace ne dă ecuația apropiată:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) + \lambda\left[N\left(x, \frac{1}{n}\right)\varphi_1 + N\left(x, \frac{2}{n}\right)\varphi_2 + \ldots.\right. \\ &\left. + N\left(x, \frac{n-1}{n}\right)\varphi_{n-1} + N\left(x, \frac{n}{n}\right)\varphi_n\right] = f(x) \end{aligned} \tag{3}$$

Să exprimăm că ecuația (3) e verificată în punctele de diviziune (2); obținem n ecuații lineare:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 + \lambda[N_{11}\varphi_1 + N_{12}\varphi_2 + \ldots. + N_{1n}\varphi_n] = f_1 \\ &\varphi_2 + \lambda[N_{21}\varphi_1 + N_{22}\varphi_2 + \ldots. + N_{2n}\varphi_n] = f_2 \\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n + \lambda[N_{n1}\varphi_1 + N_{n2}\varphi_2 + \ldots. + N_{nn}\varphi_n] = f_n \end{aligned} \tag{4}$$

www.digibuc.ro

Rădăcinile acestui sistem sunt fracțiuni raționale de λ, al căror numitor comun este:

$$(5) \qquad D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda N_{11} & \lambda N_{12} & \dots & \lambda N_{1n} \\ \lambda N_{21} & 1+\lambda N_{22} & \dots & \lambda N_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda N_{n1} & \lambda N_{n2} & \dots & 1+\lambda N_{nn} \end{vmatrix}$$

Dacă prin urmare ecuația (1) este înlocuită prin ecuația apropiată (3), teoria ecuațiunilor lineare ne dă rezultatele următoare:

a) Ecuația (3) e verificată în punctele (2), *pentru orice valoare a lui* λ *care nu anulează determinantul (5);* expresiunile necunoscutelor φ_k sunt *fracțiuni raționale* de λ având ca numitor comun pe $D_n(\lambda)$.

b) Pentru rădăcinile lui $D_n(\lambda)$, ecuația (3) *fără membrul al doilea* este verificată în punctele (2).

c) Pentru ca ecuația (3) cu membrul al doilea să fie verificată în acest din urmă caz, trebuie și e de ajuns ca determinanții caracteristici asociați minorului principal al lui $D_n(\lambda)$ să fie toți nuli.

Pentru a trece de la ecuația (3) la ecuația (1), trebuie să facem $n = \infty$; sistemul (4) devine atunci un sistem de ecuații lineare cu o infinitate de necunoscute, determinantul $D_n(\lambda)$ un determinant infinit, iar necunoscutele φ_k constitue totalitatea continuă a valorilor funcțiunii necunoscute $\varphi(\lambda)$ în intervalul (01).

D-l Fredholm are meritul de a fi făcut cu un succes complet această trecere la limită și de a fi demonstrat că cele trei proprietăți menționate mai sus se păstrează la infinit.

Primul său memoriu apărut în 1900 [1]) a fost prezintat Academiei din Stockholm; el a fost urmat în 1902 de două note prezentate Academiei de Științe din Paris [2]) și în 1903 de o lucrare de ansamblu publicată în tomul 27 «Niels H. Abel in memoriam» al revistei «Acta Mathematica».

[1]) I. FREDHOLM. Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. (10 Ianvier 1900) Of versigt af Konge. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900, No. 1, Stockholm.

[2]) I. FREDHOLM. Sur une classe de transformations rationnelles, CR. Paris t. 134 1902, I, pag. 219 și Sur une classe d'équations fonctionnelles, CR. même volume, pag. 1561.

[3]) I. FREDHOLM. Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Math. 27. 1903. pag. 365—390.

www.digibuc.ro

Procedeul d-lui I. Fredholm este *direct*; d-sa ia desvoltarea cunoscută a determinantului $D_n(\lambda)$ după puterile lui λ şi demonstrează că făcând $n=\infty$, se obţine o funcţiune $D(\lambda)$ *întreagă în* λ; consideraţiuni foarte simple din teoria determinanţilor de ordin infinit făceau foarte probabil acest rezultat fundamental pe care d-l Fredholm îl demonstră riguros cu ajutorul unei teoreme importante datorită d-lui Hadamard.

Seriile obţinute sunt de o rară eleganţă de maniare şi vor rămâneà cu siguranţă clasice.

2. Micul memoriu din 1900 atrase imediat atenţiunea d-lui *D. Hilbert*, savantul profesor de la Göttingen care se ocupă de studiul său în timp de mai mulţi ani de activitate profesorală. Punctul de plecare al d-lui D. Hilbert a fost observaţia următoare:

Determinantul $D_n(\lambda)$ este discriminantul formei quadratice.

$$(6) \qquad \sum_{p=1}^{n} x_p^2 + \lambda \sum_{p,q=1}^{n} N_{pq} x_p x_q$$

Prin urmare, întreaga teorie a formelor quadratice şi bilineare pe care ştiinţa o datoreşte lui Weierstrass, Sylvester şi Kronecker trebuià să-şi găsească aplicaţia printr'o trecere la infinit. Astfel, rolul simetriei sâmburelui apare imediat; acestui caz s'a consacrat în special d-l D. Hilbert şi şcoala sa. Reducerea formei (6) la forma sa canonică conduce pe d-l D. Hilbert la ideea de a considerà orice ecuaţie integrală ca izvorul unei serii de funcţiuni ortogonale şi de a legà studiul desvoltării funcţiunilor arbitrare în serii de funcţiuni ortogonale, la teoria ecuaţiilor integrale.

Lucrările d-lui D. Hilbert au apărut în 6 comunicări făcute Societăţii de Ştiinţe din Göttingen [1]; prima, a patra şi a cincea numai, tratează despre teoria pură; celelalte sunt consacrate aplicaţiunilor. Toate rezultatele datorite d-lui D. Hilbert au fost regăsite şi completate de unul din elevii săi, d-l E. Schmidt [2], care în a sa «Inaugural Dissertation» făcù o expunere foarte elegantă, repede

[1] D. Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen (Gött. Nachrichten). Erste Mitteilung (5 Martie 1904). 2-te Mitteilung (25 Iunie 1904). 3-te und 4-te Mitteilung (1905). 5-te (1906). 6-te (1910).

[2] E. Schmidt. Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener (1905 Iulie) şi Math. Ann. Bd. 63. 1907, pag. 433—476.

www.digibuc.ro

răspândită și utilizată, a rezultatelor principale teoretice privitoare la ecuația lui Fredholm cu sâmburele simetric.

Cazul sâmburelui nesimetric, tratat de asemenea de d-nii D. Hilbert și E. Schmidt reclamă noi cercetări. Dejà din 1903, într'o lucrare foarte remarcabilă, d-l J. Plemelj [1]) descopere seria de funcțiuni biorthogonale, cari sunt generalizarea funcțiunilor orthogonale. Aceste funcțiuni au fost regăsite de d-l B. Heywood[2]) cu ajutorul unei metode de identificare foarte simplă; însă d-l E. Goursat[3]) este acela care într'un memoriu fundamental pune în evidență toate elementele esențiale ale problemei: noțiunea de sâmburi orthogonali care rezultă din studiul aprofundat al sâmburelui rezolvant, e instrumentul de cercetare comod care face inutilă orice trecere la limită și permite a tratà ecuația integrală în cazul general.

Vom expune ăcì o metodă mixtă, folosindu-ne de toate lucrările precedente. Metoda constă în perfecționarea metodei urmată de d-l B. Heywood și deducerea tuturor rezultatelor obținute până acum și altele noi numai din studiul aprofundat al sâmburelui rezolvant.

Nu va fi vorba în această parte decât de sâmburi și funcțiuni finite și integrabile.

II. PRIMA TEOREMA A D-LUI FREDHOLM

3. **Elementul analitic al soluțiunii.** Să considerăm ecuația integrală

$$\varphi(x)+\lambda\int_b^a N(xs)\varphi(s)ds=f(x) \tag{7}$$

Dacă aplicăm, ca în cazul ecuației lui Volterra, metoda aproximațiilor succesive, obținem seria

$$\begin{aligned}\varphi(x) = f(x)-\lambda\int_a^b N(xs)f(s)ds+\lambda^2\int_a^b N_1(xs)f(s)ds+\dots \\ +(-1)^p\lambda^p\int_a^b N_{p-1}(x,s)f(s)ds+\dots\end{aligned} \tag{8}$$

[1]) I. Plemelj. Fredholmsche Functionalgleichungen in der Potentialtheorie. (Wien, 12 Mars 1903) și Zur theorie der Fredholmschen Functionalgleichung (Monatshefte für Math. und Physik XV 1903, pag. 93—128.

[2]) B. Heywood. Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm, 1-re Partie. (Jl de Math. pures et appliquées 1908).

[3]) E. Goursat. Recherches sur les équations intégrales linéaires. (Ann. de la Fac. de Toulouse, tome X, 2 e serie 1908, pag. 5—98).

www.digibuc.ro

însemnând ca şi în cazul ecuaţiei lui Volterra

$$(9)\quad N_p(xy)=\int_a^b\cdots\int_a^b N(xs_1)N(s_1s_2)\cdots N(s_py)\,ds_1ds_2\cdots ds_p.$$

Vom numì expresiunea (9) *sâmburele iterat de ordin* p. Seria (8) converge~~ază~~ complet în intervalul ab *pentru* λ *suficient de mic;* într'adevăr ea admite ca majorantă seria $\sum_{p=0} N^p x^p$, ceeace ne arată că converge~~ază~~ complect dacă $\lambda<\frac{1}{N}$; vom puteà prin urmare scrie (8) sub forma [1])

$$(10)\qquad \varphi(x)=f(x)-\lambda\int\Gamma(xs\lambda)f(s)ds,$$

însemnând

$$(11)\quad \Gamma(xyx)=N(xy)-\lambda N_1(xy)+\ldots\quad+(-1)^p\lambda^p N_{p-1}(xy)+\ldots.$$

Această expresiune (11) va fi numită *sâmburele resolvant* al ecuaţiei integrale (7).

Expresiunea (10) a soluţiunii ne procură o observaţie importantă:

Caracterul analitic al soluţiunii (10) în raport cu λ depinde în primul rând de acela al sâmburelui rezolvant. Studiul soluţiunii (10) revine deci la acela al sâmburelui rezolvant, care nu depinde decât de sâmburele ecuaţiei integrale; membrul al doilea f(x) nu intervine, cum se va vé leà mai târziu.

4. **Ecuaţiunile integrale ale sâmburelui rezolvant..** In loc de a studià direct seria (11), să observăm că din ea se pot deduce relaţiunile

$$\Gamma(xy\lambda)=N(xy)-\lambda\int N(xs)[N(sy)-\lambda N_1(sy)+\ldots]ds$$
$$=N(xy)-\lambda\int N(xs)\Gamma(sy\lambda)ds$$

şi

$$\Gamma(xy\lambda)=N(xy)-\lambda\int[N(xs)-\lambda N_1(xs)+\ldots]N(sy)ds$$
$$=N(xy)-\lambda\int\Gamma(xs\lambda)N(sy)ds$$

[1] In capitolele referitoare la ecuaţia lui Fredholm vom suprima, pentru uşurinţă de scriere, limitele *a* şi *b* de la semnul integral.

www.digibuc.ro

Se poate deci spune că sâmburele rezolvant $\Theta(xy\lambda)$ verifică ambele ecuaţiuni integrale

$$(12)\quad N(xy)-\Theta(xy\lambda)=\lambda\int N(xs)\Theta(sy\lambda)\,ds=\lambda\int\Theta(xs\lambda N(sy)ds.$$

Vom studià sâmburele rezolvant cu ajutorul uneia din aceste ecuaţiuni integrale şi este evident că soluţiunea astfel obţinută va verificà de asemenea şi pe cealaltă, din cauză că ambele ecuaţiuni au o origine comună, expresiunea (11).

5. **Ecuaţiunea asociată.** Impreună cu studiul ecuaţiunii integrale (7) este necesar a considerà şi pe acela al ecuaţiunii:

$$(7_a)\qquad \psi(x)+\lambda\int N(sx)\psi(s)ds=f(x)$$

obţinută din cea dintâiu, permutând variabilele sâmburelui; această ecuaţiune poartă numele de *ecuaţie asociată.*

Ecuaţia asociată are acelaş sâmbure rezolvant ca şi ecuaţia considerată. Intr'adevăr, acelaş calcul arată că elementul analitic al soluţiunii ecuaţiei (7_a) este

$$\psi(x)=f(x)-\lambda\int\Theta(sx\lambda)f(s)ds.$$

Studiul acestor două ecuaţiuni (7) şi (7_a) poate fi deci făcut în acelaş timp; el se reduce la studiul sâmburelui rezolvant $\Theta(xy\lambda)$.

6. **Funcţiunile întregi ale d-lui Fredholm.** Preliminarile de la paragraful 1, ne sugerează de a încercà să rezolvăm ecuaţia integrală

$$(13)\qquad \Theta(xy\lambda)=N(xy)-\lambda\int\Theta(xs)N(sy\lambda)ds$$

printr'o funcţiune meromorfă de λ

$$(14)\quad \Theta(xy\lambda)=\frac{A_0(xy)+\lambda A_1(xy)+\ldots+\lambda^p A_p(xy)+\ldots}{1+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_p\lambda^p+}=\frac{D(xy\lambda)}{D(\lambda)}.$$

Procedând prin identificare, obţinem relaţia

$$D(xy\lambda)=N(xy)D(\lambda)-\lambda\int N(xs)D(sy\lambda)ds,$$

www.digibuc.ro

de unde

$$(15)\qquad \begin{aligned} A_0(xy) &= N(xy) \\ A_1(xy) &= a_1 N(xy) - \int N(xs) A_0(sy)\,ds \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A_p(xy) &= a_p N(xy) - \int N(xs) A_{p-1}(sy)\,ds \end{aligned}$$

Pentru a obține acum formulele d-lui I. Fredholm, e suficient să ne impunem condițiunea

$$(16)\qquad p a_p = \int A_{p-1}(ss)\,ds.$$

Intr'adevăr,

$$a_1 = \int N(ss)\,ds$$

$$A_1(xy) = N(xy)\int N(ss)\,ds - \int N(xs)N(sy)\,ds = \int \begin{matrix} N(xy)N(xs) \\ N(sy)N(ss) \end{matrix} ds,$$

sau utilizând notațiunea como lă, datorită lui Fredholm

$$\begin{matrix} N(x_1y_1)N(x_1y_2) \ldots N(x_1y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ N(x_ny_1)N(x_ny_2) \ldots N(x_ny_n) \end{matrix} = N\begin{pmatrix} x_1x_2 \ldots x_n \\ y_1y_2 \ldots y_n \end{pmatrix}$$

vom puteà scrie

$$A_1(xy) = \int N\begin{pmatrix} xs \\ ys \end{pmatrix} ds.$$

Mai departe :

$$2A_2(xy) \quad N(xy)\int A_1(ss\ ds - 2\int N(xs)A_1(sy)ds$$

sau scriind s_1 și s_2 ca variabile de integrare în locul lui s în ultima integrală, scrisă de două ori în șir :

$$2A_1(xy) - \int [N(xy)A_1(ss)\,ls - N(xs_1)A_1(s_1y)ds_1 - N(xs_2)A_1(s_2y)ds_2],$$

www.digibuc.ro

sau încă:

$$2A_2(xy) = \int \left[N\,xy) N\begin{pmatrix} s_1 s_2 \\ s_1 s_2 \end{pmatrix} - N(xs_1) N\begin{pmatrix} s_1 s_2 \\ y\, s_2 \end{pmatrix} - N(xs_2) N\begin{pmatrix} s_2 s_1 \\ y s_1 \end{pmatrix} \right] ds_1 ds_2.$$

Recunoaştem sub semnul $\int$ desvoltarea determinantului

$$\begin{vmatrix} N(xy) & N(xs_1) & N(xs_2) \\ N(s_1 y) & N(s_1 s_1) & N(s_1 s_2) \\ N(s_2 y) & N\, s_2 s_1) & N(s_2 s_2) \end{vmatrix} \quad N\begin{pmatrix} x s_1 s_2 \\ y s_1 s_2 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare:

$$A_2(xy) \quad \frac{1}{2!} \int N\begin{pmatrix} x s_1 s_2 \\ y s_1 s_1 \end{pmatrix} ds_1 ds_2$$

şi deci

$$a_3 = \frac{1}{3!} \int N\begin{pmatrix} s_1 s_2 s_3 \\ s_1 s_2 s_3 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 ds_3$$

Legea este generală; într'adevăr avem

$$pA_p(xy) = \int N(xy) A_{p-1}(ss) ds - p \int N(xs) A_{p-1}(sy)\, ds$$

$$= \int [N(xy) A_{p-1}(ss) - N(xs_1) A_{p-1}(s_1 y) ds_1 - N(xs_2)\, A_{p-1}(s_2 x) ds_2$$

$$- N(xs_p) A_{p-1}(s_p x) ds_n].$$

Inlocuind pe A_{p-1} prin valoarea sa, obţinem sub semnul $\int$, desvoltarea determinantului

$$\frac{1}{(p-1)!} N\begin{pmatrix} xs_1 & s_2 \ldots s_p \\ ys_2 & s_2 \ldots s_p \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, în cazul general

$$A_p(xy) = \frac{1}{p!} \int N\begin{pmatrix} xs_1 s_2 \ldots s_p \\ xs_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_p$$

şi

$$a_p = \frac{1}{p!} \int N\begin{pmatrix} s_1 s_2 \ldots s_p \\ s_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_p.$$

Am obţinut astfel o soluţiune de forma

$$\mathcal{H}(xy\lambda) = \frac{D(xy\lambda)}{D(\lambda)}$$

www.digibuc.ro

în care

$$D(xy\lambda) - N(xy) + \frac{\lambda}{1!}\int N\begin{pmatrix} xs_1 \\ ys_1 \end{pmatrix} ds_1 + \frac{\lambda^2}{2!}\int N\begin{pmatrix} xs_1 s_2 \\ ys_1 s_2 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 +$$

$$(17) \qquad \ldots + \frac{\lambda^p}{p!}\int N\begin{pmatrix} xs_1 s_2 \ldots s_p \\ ys_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_p + \ldots$$

$$D(\lambda) = 1 + \lambda\int N(s_1 s_1) ds_1 + \ldots \frac{\lambda^p}{p!}\int N\begin{pmatrix} s_1 s_2 \ldots s_p \\ s_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_p + \ldots$$

Aceste două funcțiuni (17) sunt *funcțiuni întregi în* λ *de ordin cel mult egal cu 2.* Într'adevăr, după o teoremă a d-lui J. Hadamard [1]), modulul unui determinant de ordin p, ale cărui elemente sunt mai mici ca N, e mai mic ca

$$N^p p^{\frac{p}{2}}.$$

Prin urmare

$$|a_p| < \frac{N^p p^{\frac{p}{2}}}{p!}(b-a)^p,$$

sau utilizând formula lui Stirling

$$p! \backsim \left(\frac{p}{e}\right)^p,$$

vom avea

$$a_p| \backsim \frac{N^p e^p}{p^{\frac{p}{2}}}(b-a)^p,$$

de unde

$$(18) \qquad \sqrt[p]{p^{\frac{1}{2}}} \, | \, \overline{a^p} \, | \backsim eN(b-a) < A.$$

Inegalitatea (18) ne arată că $D(\lambda)$ *e o funcțiune întreagă de* λ *de ordin cel mult egal cu doi.* Același calcul demonstrează același rezultat pentru $D(xy\lambda)$ și pentru toate valorile lui x și y cuprinse în intervalul de integrare ab.

7. **Unicitatea soluțiunii.** Soluțiunea astfel obținută

$$(19) \qquad \varphi(x) = f(x) - \lambda\int \Theta(xs\lambda) f(s) ds$$

este *unică*; aceasta rezultă imediat din faptul că relațiile (7) și (19)

[1]) J. HADAMARD, Bull. des Sc. Math. 1893 pag. 240 și I. Wirtinger (ibid. 1907, pag. 175).

www.digibuc.ro

sunt *reciproce*. Intr'adevăr, să facem ipoteza că ar mai există o altă soluţiune $\varphi_1(x)$, astfel încât

$$\varphi_1(x) + \lambda\int N(xs)\varphi_1(s)ds = f(x) \tag{20}$$

Inlocuind în (19) valoarea lui f(x) dedusă din (20), obţinem punând în evidenţă sub semnul $\int$ funcţiunea $\varphi_1(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \lambda\int\left[N(xs) - \partial(xs\lambda) + \lambda\int\partial(xt\lambda)N(ts)dt\right]\varphi_1(s)ds.$$

Insă în virtutea ecuaţiilor integrale ale sâmburelui rezolvant, expresiunea sub semnul $\int$ este nulă; deci:

$$\varphi(x) \equiv \varphi_1(x)$$

Soluţiunea $\varphi_1(x)$ coincide deci în mod necesar cu $\varphi(x)$.

8. **Prima teoremă a d-lui I. Fredholm.** Se pot rezumà toate rezultatele obţinute în acest capitol, în teorema următoare:

Ecuaţia $$\varphi(x) + \lambda\int N(xs)\varphi(s)ds = f(x)$$

în care funcţiunile N(xy) *şi* f(x) *sunt finite şi integrabile în domeniul* ab, *admite o soluţiune, şi numai una singură, dată de formula:*

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda\int\partial(xs\lambda)f(s)ds$$

în care $\partial(xs\lambda)$ *reprezintă câtul a două funcţiuni întregi în* λ, $D(xy\lambda)$ *şi* $D(\lambda)$, *de ordin cel mult egal cu doi.*

Aceasta este prima teoremă a d-lui I. Fredholm.

III. ZERORILE FUNCŢIUNII D (λ)

9. **Desvoltarea funcţiunii** $\log D(\lambda)$; **urmele sâmburelui.** O formulă importantă, datorită de asemenea d-lui I. Fredholm, ne va fi foarte folositoare în cele ce urmează. Pentru a o stabilì, să observăm că legea de dependenţă (16) între coeficienţii a_p şi $A_p(xy)$ ne permite să scrim:

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \int D(ss)ds \tag{21}$$

www.digibuc.ro

sau împărţind prin $D(\lambda)$ pentru a pune în evidenţă în membrul la doilea sâmburele rezolvant

$$(22) \qquad \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} \int N(ss\lambda)ds.$$

Pentru a evalua membrul al doilea, ne vom servì de desvoltarea Taylorianã (11) a sâmburelui rezolvant; obţinem astfel:

$$\int N(ss\lambda)ds - n_1 - \lambda n_2 + \ldots + (-1)^p \lambda^{p-1} n_p + \ldots$$

însemnând în mod general:

$$n_p \int N_{p-1}(ss)ds.$$

Aceste constante joacă un rol important în teoria ecuaţiunilor integrale; le vom numì pentru aceasta, *urmele* sâmburelui N (xy).

Inlocuind în (22) şi integrând în raport cu λ, obţinem formula căutată:

$$(23) \quad \log D((\gamma \quad n_1\lambda - n_2 \frac{\lambda^2}{2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{n_p}{p}\lambda^p + \ldots$$

constanta de integrare fiind nulă, de oarece $D(o) = 1$.

10. **Valorile caracteristice.** Importanţa zerorilor funcţiunii $D(\lambda)$ rezultă din teorema următoare:

Orice zero λ_p *al lui* $D(\lambda)$ *este un pol al sâmburelui rezolvant.* Intr'adevăr, egalitatea

$$D'(\lambda) \int D(ss\lambda)ds$$

demonstrată în paragraful precedent, ne arată că dacă λ_p este zero şi al funcţiunii $D(xy\lambda)$, ordinul de multiplicitate în această funcţiune e cel puţin cu o unitate mai mic ca în $D(\lambda)$; λ_p rămâne prin urmare pol al sâmburelui rezolvant.

Aceste zerori formează un ansamblu numerabil. Fie λ_1, λ_2, ... λ_p, ... aceste zerori aşezate în ordinea modulelor crescătoare. De oarece ordinul funcţiunii $D(\lambda)$ este cel mult egal cu doi, seria

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_p^2} + \ldots$$

convergează cu siguranţă, ceeace ne dă o indicaţie asupra densi-

www.digibuc.ro

tăţii lor. Aceste zerori joacă un rol fundamental în teoria ecuaţiei lui Fredholm; le vom numì *valorile caracteristice* [1]) ale sâmburelui, iar D(λ) *funcţiunea caracteristică a sâmburelui.*

11. **Condiţiunea de neexistenţă a valorilor caracteristice.** Desvoltarea în produs infinit a funcţiunii D(λ) este de formă

$$D(\lambda) = e^{\alpha\lambda + \beta\lambda^2} \prod_{p=1}^{\infty} E\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)$$

însemnând prin $E\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)$ factorul primar corespunzător lui λ_p. Dacă D(λ) n'are nici un zero, ea se va reduce la

$$D(\lambda) = e^{\alpha\lambda + \beta\lambda^2}, \tag{24}$$

de unde deducem

$$\log D(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2$$

Comparând cu desvoltarea cunoscută (23) a funcţiunii log D(λ), vedem că în acest caz

$$n_3 \quad n_4 \quad \ldots \quad n_p \quad \ldots \quad 0.$$

Reciproc, dacă n_p 0 (p>3), D(λ) va fi neapărat de forma (24) şi prin urmare nu vom aveà valori caracteristice. Deci

Condiţiunea necesară şi suficientă pentru ca un sâmbure să nu aibă nici o valoare caracteristisă este ca urmele sale, începând de la a treia, să fie toate nule [2]).

12. **Cazul unui număr finit de valori caracteristice.** Când valorile caracteristice sunt în număr finit. funcţiunea D(λ) va aveà forma

$$D(\lambda)\, e^{\alpha\lambda + \beta\lambda^2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \tag{25}$$

de unde rezultă

$$\log D(\lambda) \quad \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \sum_{1}^{k} \log\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_p}\right)$$

şi identificând cu (23)

$$n_p \quad \frac{1}{\lambda_1^p} + \frac{1}{\lambda_2^p} + \ldots + \frac{1}{\lambda_k^p} \quad (p>2)$$

[1]) Eigenwerte în limba germană) Hilbert

[2]) T. Lalesco. Sur l'ordre de la fonctin D(λ de Fredholm, CR. Tome 145, 1907, pag. 906.

www.digibuc.ro

Reciproc în acest caz, vom puteà pune imediat pe $D(\lambda)$ sub forma (25). Vedem deci că urmele sâmburelui trebuie să fie, începând de la a treia, egale cu sumele de puteri asemenea α $\underline{k}$ cantități $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k$; însă se știe că între sumele de puteri asemenea α k numere, există o aceeaș relație de recurență de forma

$$\alpha_0 n_p + \alpha_1 n_{p+1} + \ldots + \alpha_k n_{p+k} \quad 0$$

și viceversa [1]). Deci

Condițiunea necesară și suficientă pentru ca un sâmbure să n'aibă decât un număr finit de valori caracteristice este ca, între urmele sale, începând de la a treia, să existe aceeaș relație de recurență lineară și omogenă :

$$\alpha_0 n_p + \alpha_1 n_{p+1} + \ldots + \alpha_k n_{p+k} = 0$$

CAP. II

STUDIUL APROFUNDAT AL SÂMBURELUI REZOLVANT [2])

I. FUNCȚIUNI ORTOGONALE ȘI BIORTOGONALE

1. **Definițiuni.** Funcțiunile în număr finit sau infinit

$$\varphi_1(x)\ \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots$$

formează un sistem *ortogonal* dacă împlinesc condițiunile [2])

$$\int \varphi_i(s)\varphi_k(s)ds = \delta_{ik}$$

δ_{ik} reprezentând un simbol egal cu zero dacă $i \neq k$ și cu 1 dacă $i = k$. Un șir de funcțiuni formează un *sistem biortogonal* dacă poate fi separat în două grupuri de funcțiuni

$$\varphi_1(x)\ \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots$$
$$\psi_1(x)\ \psi_2(x) \ldots \psi_n(x) \ldots$$

[1]) E. GOURSAT. Mém. cité, pag. 98 et T. Lalesco, Sur la fonction $D(\lambda)$ de Fredholm, CR. Tome 145, 1907, pag. 1136.

[2]) In tot acest capitol se subînțeleg iarăși limitele de integrare a și b. Asupra acestei chestiuni se poate consultà :

J. PLEMELJ (Mém. cité). E. GOURSAT (Mém. cité. Toulouse). B. HEYWOOD (Mém. cité) și de curând G. LANDSBERG Thorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen (Math. Ann. Bd. 69, 1910 pag. 227—266).

www.digibuc.ro

cari îndeplinesc condiţiunile

$$\int \varphi_i(s)\psi_k(s)ds = \delta_{ik}$$

Un sistem ortogonal sau biortogonal este complect (fermé, abgeschlossen) dacă nu-i mai putem adăugà nici o altă funcţiune sau pereche de funcţiuni.

Funcţiunile $\varphi_p(x)$ şi $\psi_p(x)$ cari au acelaş indice, sunt numite funcţiuni *asociate.*

Funcţiunile unui sistem ortogonal sunt linear independente, căci o relaţie de forma

$$\sum_1^p c_k \varphi_k(x) = o$$

înmulţită cu $\varphi_k(x)$ şi integrată de la *a* la *b* ne dă c_k o. In acelaş mod, *funcţiunile unui sistem biortogonal, aparţinând unui aceluiaş grup, sunt de asemenea linear independente;* aceeaş demonstraţie, înmulţind cu $\psi_n(x)$ dx.

2. **Bi şi ortogonalizarea unui şir de funcţiuni.** Reciproc, fiind dat un şir de funcţiuni linear independente, putem deduce prin combinări lineare un sistem ortogonal de funcţiuni. Iată cum procede D-l E. Goursat [1]:

Fie

$$(1) \qquad \varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots . \varphi_n(x)$$

funcţiunile date. Să luăm $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$ şi să alegem coeficienţii c_2 $c_3 \ldots$ c_n astfel ca

$$\int [\varphi_p(s) - c_p\varphi_1(s)]\varphi_1(s)ds = o \quad (p = 1, 2, \ldots n)$$

Dacă însemnăm

$$\varphi_p(x) - c_p\varphi_1(x) = \varphi'_p(x)$$

obţinem şirul de funcţiuni

$$\Phi_1(x) \quad \varphi'_2(x) \ldots \varphi'_n(x)$$

pentru care vom aveà

$$\int \varphi'_p(s)\Phi_1(s)ds = o \qquad (p = 2, \ldots n).$$

[1] F. Goursat (Mém. cité, Toulouse, pag. 66)

www.digibuc.ro

Funcţiunile $\varphi'_2(x)\ \varphi'_3(x) \ldots \varphi'_n(x)$ la rândul lor sunt şi ele linear independente.

Acestora le vom puteà deci aplicà acelaş procedeu şi ajungem astfel, din aproape în aproape la n funcţiuni:

$$(2) \qquad \Phi_1(x)\ \Phi_2(x) \ldots \Phi_n(x)$$

cari îndeplinesc condiţiile

$$\int \Phi_i(s)\Phi_k(s)ds = o \qquad (i \neq k).$$

Pentru a aveà acum şi

$$\int \Phi_p^2(s)ds = 1 \qquad (p = 1, \ldots n)$$

e de ajuns a înmulţì $\Phi_p(x)$ prin constanta

$$\frac{1}{\sqrt{\int \Phi_p^2(s)ds}}.$$

Sistemul ortogonal (2) astfel obţinut nu este unic; într'adevăr funcţiunile

$$\Phi_p'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}\Phi_k(x) \qquad (p = 1, \ldots n).$$

In care determinantul a_{ik} este ortogonal formează şi ele un astfel de sistem; este evident, reciproc, că în acest mod epuizăm toate sistemele ortogonale echivalente cu (1).

Intr'un mod absolut analog, să considerăm două şiruri de n funcţiuni linear independente

$$(3) \qquad \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots\ldots & \varphi_n(x) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \ldots\ldots & \psi_n(x). \end{matrix}$$

astfel că nici o combinare lineară de funcţiuni $\varphi_p(x)$ să nu fie ortogonală în acelaş timp cu toate funcţiuniie $\psi_p(x)$. Zic că în acest caz se va puteà deduce un sistem biortogonal.

Intr'adevăr, să luăm $\varphi_1(x) = \Phi_1(x)$ şi să însemnăm prin $\psi_1(x)$ o combinare lineară, — totdeauna existentă — a funcţiunilor $\psi_p(x)$, astfel că

$$\int \Phi_1(s)\Psi_1(s)ds \neq o.$$

www.digibuc.ro

Să determinăm acum coeficienții $a_2, a_3 \ldots a_n$ și $b_2, b_3 \ldots b^n$ astfel ca să avem

$$\int \Psi_1(s)\,[\varphi_p(s) - a_p\varphi_1(s)]\,ds = o$$
$$\int \Phi_1(s)\,[\varphi_p(s) - b_p\varphi_1(s)]\,ds = o$$

și să notăm

$$\begin{matrix} \varphi_p(x) - a_p\Phi_1(x) & \varphi_p'(x) \\ \psi_p(x) - b_p\Psi_1(x) & \psi_p'(x) \end{matrix} \quad (p = 2, \ldots . n).$$

Obținem astfel funcțiunile

$$\begin{matrix} \Phi_1(x) & \varphi_2'(x) \ldots . & \varphi_n'(x) \\ \Psi_1(x) & \psi_2'(x) \ldots . & \psi_n'(x) \end{matrix}$$

și avem relațiile

$$\begin{matrix} \int \Phi_1(s)\psi_p'(s)ds = o \\ \int \Psi_1(s)\varphi'(s)ds = o \end{matrix} \quad (p = 2, \ldots . n).$$

Funcțiunile

$$(4) \qquad \begin{matrix} \varphi_2'(x), \varphi_3'(x) \ldots . & \varphi_n'(x) \\ \psi_2'(x)\ \psi_3'(x) \ldots . & \psi_n'(x) \end{matrix}$$

sunt în fiecare grup de asemenea linear independente și nici o combinare lineară a funcțiunilor φ' nu poate fi ortogonală în acelaș timp tuturor funcțiunilor ψ', căci cum ea este dejà ortogonală funcțiunii $\psi_1(x)$, ar fi ortogonală tuturor funcțiunilor $\psi_p(x)$, ceeace e contrar ipotezei.

Sistemul (4) se bucură deci de aceleași proprietăți ca și sistemul primitiv (3), i se poate deci repetà aceeaș operație și ajungem astfel din aproape în aproape la un sistem, de n perechi de funcțiuni $\varphi_p(x)$ și $\psi_p(x)$ cari împlinesc condițiunile

$$\int \Phi_i(s)\psi_k(s)ds = o \text{ dacă } i \neq k$$

și $\int \Phi_p(s(\psi_p(s)ds \neq o$; dacă înmulțim în sfârșit perechea $\Phi_p(x), \psi_p(x)$ prin constanta

$$\frac{1}{\sqrt{\int \Phi_p(s)\overline{\varphi_p}(s)\,ds}}$$

obținem sistemul biortogonal căutat.

www.digibuc.ro

Acest sistem nu este unic; într'adevăr, dacă punem

$$(5)\qquad \begin{aligned} \Phi'_p(x) &= \sum_{n=1}^{n} a_{pr}\Phi_r(x) \\ \Psi'_p(x) &= \sum_{n=1}^{n} b_{pr}\varphi_r(x) \end{aligned} \qquad (p = 1,..n)$$

funcțiunile $\Phi'_r(x)$ și $\varphi'_p(x)$ vor formà și ele un sistem biortogonal, dacă

$$(5')\qquad \sum_{n}^{n=1} a_{ir}b_{kr} = \delta_{ik}.$$

Determinantul $|a_{ik}| \neq 0$ este arbitrar; relațiunile (5') determină însă, odată $|a_{ik}|$ dat, într'un mod unic determinantul $|b_{ik}|$.

Reciproc dubla substituțiune (5) pe care noi o vom numì *substituțiune biortogonală* ne dă sistemul biortogonal cel mai general echivalent cu (3).

Procedeele regulate de reducere sunt evident aplicabile și în cazurile când șirurile (1) și (3) sunt infinite.

3. **Funcțiunile de forma** $\varphi(xy) = \sum_{p=1}^{n} \varphi^p(x)\psi_p(y).$

vom aveà nevoie mai târziu de următoarea teoremă:

Dacă o funcțiune $\varphi(xy)$ a cărei urmă este finită, verifică relația

$$(6)\qquad \varphi(xy) = \int \varphi(xs)\varphi(sy)ds,$$

ea e neapărat de forma:

$$(7)\qquad \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_n(x)\psi_n(y)$$

funcțiunile φ și ψ formând două grupuri ale unui sistem biortogonal.

Să observăm mai întâiu că urma este neapărat un număr întreg și pozitiv. Într'adevăr, să considerăm $\varphi(xy)$ ca sâmburele unei ecuații integrale tipul Fredholm de speța a doua; în virtutea relației (6) toți sâmburii iterați sunt identici și prin urmare toate *urmele* sâmburelui sunt egale cu

$$\varphi_1 = \int \varphi(ss)ds$$

www.digibuc.ro

vom aveà deci:

$$\log. D(\lambda) = \varphi_1\left[\frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\lambda^n}{n} + \ldots\right] - \varphi_1 \log(1+\lambda)$$

de unde

$$D(\lambda) = (1+\lambda)(1+\lambda)^{\varphi_1} \tag{8}$$

aceasta ne arată că φ_1 este un număr întreg şi pozitiv n. Astfel fiind, să formăm funcţiunea

$$\varphi(xy) = \frac{\varphi(xy_1)\varphi(x_1y)}{\varphi(x^1y^1)} = \varphi^1(xy).$$

Această funcţiune verifică de asemenea relaţia (6) *însă urma sa este* n — 1.

Intr'adevăr, avem:

$$\int \varphi_1(xs)\varphi_1(sy)ds = \int \left[\varphi(xs) - \frac{\varphi(xy_1)\varphi(x_1s)}{\varphi(x_1y_1)}\right]\left[\varphi(sy) - \frac{\varphi(sy_1)\varphi(x_1y)}{\varphi(x_1y_1)}\right]ds$$

$$= \varphi(xy) - \frac{\varphi(xy_1)\varphi(x_1y)}{\varphi(x_1y_1)} - \frac{\varphi(xy_1)\varphi(x_1y)}{\varphi(x_1y_1)} + \frac{\varphi(xy_1)\varphi(x_1y}{\varphi(x_1y_1}$$

$$= \varphi(xy) - \frac{\varphi(xy_1)\varphi(x_1y)}{\varphi(x_1y_1)} \quad \varphi_1(xy).$$

Urma sa este

$$\int \varphi_1(ss)\, ls = \int \varphi(ss)ds - \frac{\int \varphi(x_1s)\varphi(sy_1)ds}{\varphi(x_1y_1)} \qquad n-1$$

Putem atunci aplică funcţiunii $\varphi_1(xy)$ acelaş procedeu ca şi lui $\varphi'xy)$, astfel că vom puteà scrie $\varphi(xy)$ sub forma

$$\varphi(xy) \quad \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_n(x)\psi_n(y) + \chi(xy)$$

$\chi(xy)$ fiind o funcţiune verificând relaţia (6) însă având o urmă nulă; zic acum că χ xy) este identic nulă. Intr'adevăr, sâmburele său rezolvant ar fi $\frac{\chi(xy)}{1+\lambda}$, ceeace este imposibil fiindcă $D(\lambda)$ 1, după cum rezultă din (8) unde c_1 o; deci $\chi(xy) \equiv o$.

Condiţiunile de biortogonalitate rezultă atunci scriind că expresiunea (7) verifică relaţia (6). Trebuie să avem:

$$\sum_{p=1}^{n} \varphi_p(x)\psi_p(y) = \sum \varphi_i(x)\psi_p(y) \int \varphi_1(s)\psi_k(s)ds,$$

www.digibuc.ro

ceeace pune în evidență tocmai relațiunile de biortogonalitate căutate. Putem deci spune în rezumat:

Condiția necesară și suficientă pentru ca o funcțiune $\varphi(xy)$ *cu urmă finită să fie de forma* (7), *este ca ea să verifice ecuația* (6).

II. – FUNCȚIUNI PRINCIPALE

4. **Sâmburi ortogonali.** Această noțiune fundamentală e datorită d-lor E. Goursat și B. Heywood; ea este indispensabilă pentru a evità trecerile la limită algebrice și se desprinde de altfel în mod natural din studiul aprofundat al sâmburelui rezolvant. Ea e utilă și pentru alte cercetări; de aceea o vom prezentà în mod direct.

Doi sâmburi $P(xy)$ și $R(xy)$ sunt *ortogonali* când între ei există relațiunile

$$(9)\qquad \int P(xs)R(sy)ds = o \qquad \int R(xs)P(sy)ds = o.$$

Când numai una din aceste relații este verificată, vom spune cu d-l E. Goursat că sâmburii sunt *semi-ortogonali*.

Sâmburii $P(xy)$ și $R(xy)$ fiind ortogonali, putem observà că vom aveà și relațiunile

$$\int P(xs)\mathfrak{R}(sy)ds = o \qquad \int R(xs)\mathfrak{P}(sy)ds = o$$

în virtutea desvoltării sâmburelui rezolvant.

$$R(xy\lambda) = R(xy) + \lambda R_1(xy) + \dots$$

și una analoagă a expresiunii $P(xy\lambda)$.

Sâmburii ortogonali se bucură de următoarele două proprietăți:

I. *Dacă sâmburii* $P(xy)$ *și* $R(xy)$ *sunt ortogonali sau numai semi-ortogonali* (Goursat) *și dacă însemnăm*

$$N(xy) = P(xy) + R(xy).$$

avem

$$D_N(\lambda) = D_P(\lambda) \times D_R(\lambda).$$

II. *Dacă sâmburii* $P(xy)$ *și* $R(xy)$ *sunt ortogonali, vom aveà:*

$$\mathfrak{N}(xy) = \mathfrak{R}(xy) + \mathfrak{P}(xy);$$

notațiunile fiind evidente.

www.digibuc.ro

Prima teoremă rezultă imediat dacă adunăm membru cu membru relaţiunile

$$\log D_P(\lambda) = p_1\lambda - p_2\frac{\lambda^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} p_n\frac{\lambda_n}{n} + \ldots$$

$$\log D_R(\lambda) = r_1\lambda - r_2\frac{\lambda^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} r_n\frac{\lambda_n}{n} + \ldots,$$

ceeace ne dă

$$\log D_P(\lambda)D_R(\lambda) = (p_1+r_1)\lambda - (p_2+r_2)\frac{\lambda^2}{2} + \ldots$$

Este suficient acum să observăm că

$$\begin{aligned} n_1 &= p_1 + r_1 \\ n_2 &= \int [P(s_1s_2) + R(s_1s_2)]\,[P(s_2s_1) + R(s_2s_1)]ds_1ds_2 \\ &= p_2 + r_2 + 2\int P(s_1s_2)R(s_2s_1)ds_1ds_2, \end{aligned} \tag{2}$$

de unde rezultă

$$n_2 = p_2 + r_2.$$

Legea este acum generală; într'adevăr

$$\begin{aligned} n_q &= \int [P(s_1s_2)+R(s_1s_2)]\,[P(s_2s_3)+R)s_2s_3)]\ldots[P(s_qs_1)+R(s_qs_1)]\,ds_1ds_2\ldots ds_q \\ &= p_q + r_q + d_r. \end{aligned}$$

d_r fiind o sumă de integrale toate nule în virtutea *uncia* oarecare numai din relaţiile (9). Avem deci:

$$\log D_N(\lambda) = \log D_P(\lambda) \times D_R(\lambda),$$

de unde

$$D_N(\lambda) = D_P(\lambda) \times D_R(\lambda).$$

Pentru a demonstrà teorema a doua, să pornim de la ecuaţiunile de definiţie a sâmburilor rezolvanţi:

$$\begin{aligned} P(xy\lambda) &= P(xy) - \lambda\int P(xs)P(sy\lambda)ds \\ R(xy\lambda) &= R(xy) - \lambda\int R(xs)R(sy\lambda)ds, \end{aligned} \tag{10}$$

de unde prin adunare

$$\begin{aligned} P(xy\lambda)+R(xy\lambda) &= P(xy)+R(xy)-\lambda\int_a^b [P(xs)P(sy\lambda) \\ &+ R(xs)R(sy\lambda)]ds = P(xy) + R(xy) - \lambda\int [P(xs) \\ &+ R(xs)]\,[P(sy\lambda) + R(sy\lambda)]ds \end{aligned} \tag{11}$$

www.digibuc.ro

căci integralele introduse

$$\int P(xs)R(s\gamma\lambda)ds \quad \text{şi} \quad \int R(xs)P(s\gamma\lambda)ds$$

sunt nule, în virtutea unei observaţiuni precedente.

Ecuaţiunea (11) arată tocmai că sâmburele rezolvant al lui $P(xy) + R(xy)$ este $P(xy\lambda) + R(xy\lambda)$.

5. **Ecuaţiunea integrală generală a sâmburilor rezolvanţi.** Am văzut (cap. I; I, 4) că sâmburele rezolvant verifică ecuaţiunile integrale

$$(12)\quad N(xy) - \Theta(xy\lambda) = \lambda \int N(xs)\Theta(s\gamma\lambda)ds = \lambda \int \Theta(xs\lambda)N(s\gamma)ds.$$

Aceste ecuaţiuni sunt cazuri particulare ale ecuaţiunii integrale mai generale [1]:

$$(13)\quad \Theta(xy\lambda) - \Theta(xy\mu) = (\mu - \lambda \int \Theta(xs\lambda)\Theta(s\gamma\mu)ds.$$

Pentru a o stabili să scădem membru cu membru ecuaţiunile

$$(14)\quad \begin{aligned} N(xy) - \Theta(xy\lambda) &= \lambda \int N(xs)\Theta(s\gamma\lambda)ds \\ N(xy) - \Theta(xy\mu) &= \mu \int N(xs)\Theta(s\gamma\mu)ds. \end{aligned}$$

ceeace ne dă

$$(14')\quad \Theta(xy\lambda) - \Theta(xy\mu) = \mu \int N(xs)\Theta(s\gamma\mu)ds - \lambda \int N(xs)\Theta(s\gamma\lambda)ds.$$

Pentru a obţine valoarea membrului al doilea în alt mod, să facem în prima din ecuaţiile (14) $x = t$ şi să o înmulţim cu $\mu\Theta(xt\mu)dt$; în acelaş mod să facem în a doua, $y = t$, să o înmulţim cu $\lambda\Theta(x\gamma\lambda)dt$; să integrăm şi să facem diferenţa. Obţinem

$$(\mu - \lambda) \int \Theta(xt\mu)\Theta(tx\lambda)dt \quad \mu \int N(xt)\Theta(t\gamma\mu)dt - \lambda \int N(xt)\Theta(t\gamma\lambda)dt$$

Combinând ecuaţia (14') cu aceasta, obţinem ecuaţia integrală căutată.

Ceeace dă acestei ecuaţii integrale o importanţă deosebită este faptul că sâmburele $N(xy)$ *nu mai figurează*; aceasta este deci ecuaţiunea pe care o verifică *toţi sâmburii rezolvanţi*. Avem deci afface cu o adevărată operaţie analitică »in abstracto« căreia ecuaţia (13) i-ar puteà servì drept ecuaţie de definiţiune.

[1] Semnalată întâiu de d-nii Plemelj şi Hilbert.

www.digibuc.ro

6. **Partea caracteristică a unui sâmbure rezolvant, relativă la un pol.** Fie λ_1 o rădăcină a funcțiunii $D(\lambda)$, de multiplicitate n, am văzut (cap. I; III, 10) că ea va fi un pol pentru sâmburele rezolvant; fie $m \leq n$ ordinul acestui pol. Sâmburele rezolvant se va puteà scrie, astfel în vecinătatea valorii $\lambda = \lambda_1$

$$\mathcal{R}(xy\lambda) = \frac{\varphi_m(xy)}{(\lambda - \lambda_1)^m} + \frac{\varphi_{m-1}(xy)}{(\lambda - \lambda_1)_{m-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(xy)}{(\lambda - \lambda)}$$

(15)

$$+ \sum_{p=o}^{\infty} \psi_p(xy)(\lambda - \lambda_1)^p - G_1(xy\lambda + P(xy\lambda).$$

însemnând prin $G_1(xy\lambda)$ partea caracteristică relativă la polul λ_1.

Ne propunem să studiem mai de aproape funcțiunile $\varphi(xy$ și $\psi(xy)$. Să înlocuim pentru aceasta în ecuația generală (13) pe $\mathcal{R}(xy\lambda)$ prin valoarea sa (15) și să însemnăm pentru simplificare $\lambda - \lambda_1 = h$ și $\mu - \lambda_1 = k$; obținem:

$$\varphi^m(xy)\left[\frac{1}{h^m} - \frac{1}{k^m}\right] + \ldots + \varphi_1(xy)\left[\frac{1}{h} - \frac{1}{k}\right] + \sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(xy)(h^p - k^p) =$$

$$= (k - h)\int \left[\frac{\varphi^m(xs)}{h^m} + \ldots + \frac{\varphi_1(xs)}{h} + \sum_{p=0}^{\infty} \psi_p(xs)h^p\right]$$

$$\left[\frac{\varphi^m(sy)}{k^m} + \ldots + \frac{\varphi_1(ys)}{k} + \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(sy)k^p\right] ds,$$

sau simplificând prin k—h

$$\frac{\varphi_1(xy)}{hk} + \ldots + \frac{\varphi^m(xy)}{h^m k^m}\left[h^{m-1} + kh^{m-2} + \ldots + k^{m-1}\right] + \sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(xy)$$

(16)

$$\left[h^{p-1} + kh^{p-2} + \ldots + k^{p-1}\right] = \sum_{p,q=1}^{m} \frac{1}{h^p k^q}\int \varphi^p(xs)\varphi_1(sy)\, ls +$$

$$+ \sum_{p,q} \frac{h^p}{k_q}\int \psi^p(xs)\varphi_q(sy)\, ls + \sum_{pq}\int \varphi_q(xs)\psi^p(sy)ds +$$

$$+ \sum_{dq} h^p k^q \int \psi^p(xs)\varphi_q(sy)ds.$$

Membrul al doilea al relației (16) conține patru sume de termeni. Considerând mai întâiu prima sumă ai cărei termeni conțin

www.digibuc.ro

şi pe h şi pe k la numitor, ea ne va da prin identificare cu primul membru, relaţiunile :

$$(17) \qquad \varphi_{p+q-1}(xy)=\int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)ds \quad (p+q\leq m+1)$$

adică atâta vreme cât indicele $p+q-1$ există, şi

$$(18) \qquad \int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)ds=0 \quad (p+q>m+1),$$

pentru rest. Termenii sumelor a doua şi a treia din membrul al doilea neexistând în primul membru, vom aveà pentru toţi indicii

$$(19) \qquad \int \varphi_p(xs)\psi_q(sy)ds = \int \psi_p(xs)\varphi_q(sy)ds = 0,$$

ceeace ne arată de la început că toate funcţiunile $\varphi(xy)$ sunt ortogonale cu funcţiunile $\psi(xy)$; cu alte cuvinte că funcţiunile

$$G_1(xy\lambda) \text{ şi } P(xy\lambda)$$

sunt ortogonale pentru toate valorile lui λ.

In fine, a patra sumă ne dă relaţiunile

$$(20) \qquad \psi_{p+q+1}(xy) = \int \psi_p(xs)\psi_q(sy)ds.$$

Reciproc, relaţiunile (17) şi (18) fiind îndeplinite, $G_1(xy\lambda)$ este un sâmbure rezolvant de oarece verifică ecuaţiunea generală a sâmburilor rezolvanţi ; sâmburele corespunzător va fi

$$G(xyo) = \frac{\varphi_m(xy)}{(-\lambda_1)^m} + \frac{\varphi_{m-1}(xy)}{(-\lambda_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(xy)}{-\lambda_1}$$

care se mai numeşte şi *partea sâmburelui relativă la polul* λ_1. După o observaţie prece lentă, această parte este ortogonală cu restul sâmburelui ; ea poate fi deci studiată separat.

Să observăm în sfârşit că sâmburele $P(xy)$ nu mai are pe λ_1 ca valoare caracteristică.

7. **Funcţiuni principale.** Pentru a găsì expresiunea generală a funcţiunilor $\varphi_p(xy)$, va fi deajuns să rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$(21a) \quad \varphi_{p+q-1}(xy)= \int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)ds \qquad p+q\leq m+1$$

$$(21b) \quad 0 = \int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)ds \qquad p+q>m+1$$

care caracterizează, după cum am văzut, aceste funcţiuni.

www.digibuc.ro

Să considerăm întâiu cazul p=q=1, adică ecuația

$$\varphi_1(xy)=\int \varphi_1(xs)\varphi_1(sy)ds.$$

De oarece urma funcțiuni $\varphi_1(xy)$ este finită [1]), această funcțiune va fi neapărat de forma

$$\varphi_1(xy)=\varphi_1(x)\psi_1(y)+\ldots+\varphi_n(x)\psi_n(y),$$

funcțiunile φ și ψ formând grupurile unui sistem biortogonal (cap. II., 1, 3).

Să facem apoi q=2, iar p oarecare și invers; se obțin relațiunile

$$(22)\quad \varphi_{p+1}(xy)=\int \varphi_p(xs)\varphi_2(sy)ds=\int \varphi_2(xs)\varphi_p(sy)ds,$$

dintre care cea dintâiu, pentru $p=1$:

$$\varphi_2(xy)=\int \varphi_1(xs)\varphi_2(sy)ds=\int \varphi_2(xs)\varphi_1(sy)ds$$

ne arată că $\varphi_2(xy)$ este o funcțiune lineară de φ și ψ separat. Vom avea deci:

$$(23a)\qquad \varphi_2(xy)=\sum_{i,k=1}^{p} a_{ik}\,\varphi_i(x)\psi_k(y)$$

Relațiunile (22) următoare ne dau apoi succesiv valorile celorlalte funcțiuni:

$$\varphi_3(xy)=\int \varphi_2(xs)\varphi_2(sy)ds$$

$$(23b)\qquad \varphi_4(xy)=\int \varphi_3(xs)\varphi_2(sy)ds=\int \varphi_2(xs)\varphi_3(sy)ds$$

$$\ldots\ldots$$

$$\varphi_m(xy)=\int \varphi_{m-1}(xs)\varphi_2(sy)ds=\int \varphi_2(xs)\varphi_{m-1}(sy)ds$$

Celelalte relațiuni (21a) sunt *consecințe ale acestora*. Într'adevăr să considerăm relația:

$$\varphi_{p+q-1}(x)=\int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)ds.$$

Dacă înlocuim $\varphi_q(xy)$ prin valoarea sa

$$\int \varphi_{q-1}(xs)\varphi_2(sy)ds$$

dedusă din (23), obținem:

$$\varphi_{p+q-1}(xy)=\int \varphi_{p-1}(xs)\varphi_2(st)\varphi_q(ty)ds\,dt=\int \varphi_{p-1}(xs)\varphi_{q+1}(sy)ds.$$

www.digibuc.ro

Putem deci mări sau micşorà cu o unitate, indicii p *şi* q ; aplicaţiunea repetată a acestei operaţiuni va reduce deci orice relaţie (21a) la una oarecare din relaţiunile (23).

In acelaş mod să considerăm al doilea grup (21b): prin aplicarea repetată a aceleiaşi operaţiuni, vom puteà totdeauna să facem ca unul din indici să fie egal cu m; vom aveà atunci identităţile

$$\int \varphi_m(ys)\varphi_k(sy)ds=o \qquad (k=2, \ldots m),$$

dintre cari numai cea dintâiu

$$\int \varphi_m(xs)\varphi_2(sy)ds=o \tag{24}$$

este distinctă ; celelalte snnt consecinţe ale identităţii (24). Intr'adevăr

$$\int \varphi_m(xs)\varphi_k(sy)ds=\int \varphi_m(xs)\varphi_2(st)\varphi_{k-1}(ty)dsdt\equiv o.$$

Pentru a enunţà în mod simplu rezultatele pe cari le-am obţinut până acum, vom zice mai întâiu că funcţiunile φ şi ψ formează un sistem de funcţiuni *principale* şi vom observà după aceea că formulele (23 b), nu exprimă altceva decât că sâmburii $\varphi_k(xy)$ $(k>2)$ se obţin din $\varphi_2(xy)$ prin iteraţii succesive; în sfârşit condiţiunea (24) se poate enunţà zicând că sâmburele iterat de ordinul $m-1$ al lui $\varphi_2(xy)$ este identic nul. Putem atunci rezumà rezultatele obţinute sub forma următoare:

a) *Funcţiunea* $\varphi_1(xy)$ *este o sumă de produse de funcţiuni asociate ale unui sistem biortogonal finit, numite funcţiuni principale; avem :*

$$\varphi_1(xy)=\sum_{p=1}^{n}\varphi^p(x)\psi^p(y).$$

b) *Funcţiunea* $\varphi_2(xy)$ *este o formă bilineară de fnncţiuni principale ; avem :*

$$\varphi_2(xy)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i(x)\varphi_k(y). \tag{24'}$$

c) *Celelalte funcţiuni* $\varphi_k(xy)$ *se obţin din* $\varphi_2(xy)$ *prin iterări succesive; dacă polul este de ordinul m, sâmburele iterat ae ordinul* $m-1$ *al lui* $\varphi_2(xy)$ *este identic nul.*

Reciproc, metoda urmată ne arată că, fiind dat un sistem biortogonal de 2p funcţiuni φ şi ψ, precum şi un tablou de constante $|a_{ik}|$,

www.digibuc.ro

astfel încât sâmburele iterat de ordinul m—1 ((m≥n) al expresiunii (24') este identic nul, atunci funcţiunea G(xy), formată cu aceste elemente prin aplicarea formulei (15) va fi partea caracteristică a unui sâmbure, relativă la un pol de ordinul m.

III. A DOUA ŞI A TREIA TEOREMĂ A D-LUI FREDHOLM

8. **Studiul direct al sâmburilor de forma** $\sum_{p=1}^{n} a_p(x)\,b_p(y)$; **rangul unei valori caracteristice.** Vom începe acest capitol cu studiul direct al sâmburilor de forma:

$$N(xy)=a_1(x)b_1(y)+\ldots+a_n(x)b_n(y) \tag{25}$$

stu liu datorit D-lor E. Goursat [1]) şi E. Schmidt [2]); de oarece sâmburele $G_1(xy)$ este tocmai de această formă, vom utiliză astfel rezultatele obţinute pentru teoria generală.

Acest studiu îşi are, în afară de aceasta, şi importanţa lui intrinsecă.

Ecuaţia lui Fredholm se va scrie în acest caz:

$$\varphi(x)+\lambda\left[a_1(x)\int b_1(s)\varphi(s)ds+a_2(x)\int b_2(s)\varphi(s)ds+\ldots\right.$$
$$\left.+a_n(x)\int b_n(s)\varphi(s)ds\right]=f(x). \tag{25'}$$

Dacă însemnăm

$$k_p=\int b_p(s)\varphi(s)ds \tag{26}$$

vedem că $\varphi(x)$ este de forma

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\left[k_1a_1(x)+k_2a_2(x)+\ldots+k_na_n(x)\right]. \tag{27}$$

Pentru a determină constantele k_p, să înlocuim valoarea (27) a lui $\varphi(x)$ în ecuaţiunile (26); aceasta ne dă n ecuaţiuni lineare cu n necunoscute

$$k_p+\lambda\left[k_1\int a_1(s)b_p(s)ds+k_2\int a_2(s)b_p(s)ds+\ldots\right.$$
$$\left.+k_n\int a_n(s)b_p(s)ds\right]=\int f(s)b_p(s)ds, \tag{28}$$

[1]) *E. Goursat.* Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm. (Bull. de la soc. math. de France, t. 35, 1907, pag. 163—173).

[2]) *E. Schmidt.* Entwickl. willk. funct. II Teil. (Math. Ann. Bd. 64, pag. 161—174, 1908).

www.digibuc.ro

al căror determinant este:

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1+\lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & 1+\lambda\alpha_{22} & \lambda\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda\alpha_{n1} & \lambda\alpha_{n2} & 1+\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

însemnând pentru prezentare

$$\alpha_{pq}=\int a_p(s)b_q(s)\,ds.$$

Teoria ecuațiunilor lineare, aplicată sistemului (28) ne permite deci a enunța rezultatele următoare:

a) Dacă determinantul $D(\lambda)$ este diferit de zero, sistemul (28) admite un singur sistem de soluțiuni; deci, în acest caz, *ecuațiunea lui Fredholm admite o singură soluțiune* dată de expresiunea (27).

b) Dacă $D(\lambda)=0$ — ceeace are loc pentru n valori ale lui λ — ecuațiunile (28) omogene, adică fără membru al doilea, vor admite soluțiuni. Dacă ordinul minorului principal al sistemului (28) este r pentru $\lambda=\lambda_1$ (minorul este un determinant de ordinul $n-r$), soluțiunea generală a sistemului va fi de forma:

$$k_p=\rho_1 m_{1p}+\rho_2 m_{2p}+\ldots+\rho_r m_{rp} \qquad (p=1,\ldots n)$$

$\rho_1\,\rho_2\ldots\rho_r$ fiind parametri arbitrari. Inlocuind valorile lui k_p astfel obținute în expresiunea (27) a lui $\varphi(x)$, obținem:

$$\varphi(x)=\rho_1\varphi_1(x)+\rho_2\varphi_2(x)+\ldots+\rho_r\varphi_r(x);$$

iar funcțiunile

$$\varphi_q(x)=m_{q1}a_1(x)+m_{q2}a_2(x)+\ldots+m_{qn}a_n(x) \qquad (q=1,\ldots r$$

sunt linear independente.

In acest caz, prin urmare, *ecuațiunea omogenă fără membrul al doilea va admite* r *soluțiuni linear independente.* Ele se numesc *soluțiuni fundamentale* ale ecuațiunii integrale (25').

Vom numì *rang al unei valori caracteristice,* numărul de soluțiuni linear independente pe cari le are ecuațiunea omogenă pentru $\lambda=\lambda_1$. In cazul nostru, rangul lui λ_1 este r.

c) Ecuațiunea asociată

$$\psi(x)+\lambda\int[a_1(s)b_1(x)+\ldots+a_n(s)b_n(x)]\psi(s)\,ds=f(x)$$

www.digibuc.ro

se obține din (25') schimbând funcțiunile $a_q(x)$ și $b_q(x)$ între ele. Termenul general al determinantului sistemului (25') fiind

$$\alpha_{ik} = \int a_i(s) b_k(s) ds$$

acel al ecuațiunii asociate va fi

$$\int b_i(s) a_k(s) ds = \alpha_{ki}.$$

Determinanții caracteristici sunt deci identici, de oarece unul se deduce din celalt prin schimbarea liniilor cu coloanele.

Ecuațiunea asociată are deci aceleași valori caracteristice, fiecare de aceeași multiciplitate și de același rang.

d) Să considerăm acum ecuațiunea (25') în cazul când λ este egal cu o valoare caracteristică λ_1, însă membru al doilea diferit de zero.

Pentru ca ecuațiunile (28) să fie compatibile trebuie și e de ajuns ca determinanții bordați ai minorului principal să fie toți nuli. Avem r determinanți bordați; prin urmare, avem cel mult r condițiuni independente. In loc de a le obține direct prin metoda algebrică, să observăm că dacă înmulțim ecuația

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda_1 \int N(xs) \varphi(s) ds$$

cu $\psi_p(x)dx$ și integrăm obținem

$$\int f(s) \psi_p(s)\, ls = \int \varphi(s\, \varphi_p(s) ds + \lambda_1 \int \varphi_p(x) N(xs) \varphi' s) ds dx$$

$$= \int \varphi(s) \psi_p(s) ds - \lambda_1 \int \psi_p(s) \frac{\varphi(s) ds}{\lambda_1} = o \quad (p = 1, \ldots r),$$

ceea ce ne dă r condițiuni *necesare distincte;* ele sunt și suficiente fiindcă condițiunile date de determinanții bordați sunt exact de aceeaș formă și sunt în același număr.

9. **Funcțiuni fundamentale; sâmbure canonic.** Să reluăm acum studiul sâmburelui $G_1(xy)$. In capitolul precedent am văzut cum se ajunge la noțiunea de funcțiuni principale. Aceste funcțiuni nu sunt definite decât abstracție făcând de o substituție biortogonală; chestiunea care se pune acum, este de a profită de această nedeterminare pentru ca sistemul de funcțiuni principale să fie cât mai simplu.

www.digibuc.ro

Această chestiune revine, în virtutea unui artificiu care este astăzi clasic, la aceea de a reduce forma bilineară [1]).

$$(29) \qquad \varphi_2(xy) + \lambda\varphi_1(xy)$$

la forma sa canonică. Dar e uşor de arătat că discriminantul acestei forme

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \lambda + a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda + a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \lambda + a_{nn} \end{vmatrix}$$

e identic egal cu λ^n.

Intr'adevăr, dacă considerăm pe $\varphi_2(xy)$ ca sâmburele unei ecuaţii integrale, determinantul său caracteristic va aveà ca termen general, în virtutea proprietăţilor precedente:

$$\alpha_{ik} = \int \varphi_i(s)\left[a_{ik}\,\psi_1(s) + \ldots + a_{kp}\psi_p(s) + \ldots + a_{kn}\psi_n(s)\right]ds = a_{ki}$$

Determinantul caracteristic al funcţiunii $\varphi_2(xy)$ este deci $\lambda^n\,\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$; însă el este identic egal cu 1, de oare ce $\varphi_2(xy)$ e un sâmbure *fără constantă caracteristică*, sâmburele său iterat de ordinul $n-1$ fiind identic nul. Avem deci $\Delta(\lambda) = \lambda^n$.

Cazul cel mai simplu este acela în care determinantul $\Delta(\lambda)$ n'are decât un singur divizor elementar. Determinantul canonic cu un singur divizor elementar este

$$(30) \qquad \begin{vmatrix} \lambda & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

Va există deci, în acest caz, o dublă substituţie lineară care va transformà forma (29) în

$$\lambda\left[\Phi_1(x)\Psi_1(y) + \ldots + \Phi_p(x)\Psi_p(y) + \ldots + \Phi_n(x)\Psi_n(y)\right] + \left[a_1\Phi_1(x)\Psi_2 + \ldots + a_{n-1}\Phi_{n-1}(x)\Psi_n(y)\right]$$

noile funcţiuni Φ Ψ formează de asemenea un sistem biortogonal,

[1]) Această teorie este magistral expusă, după ideile d-lui G. Darboux, în memoriul *L. Sauvage*. La théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. (Ann. de la Fac. de Toulouse, 1894).

www.digibuc.ro

de oarece $\varphi_1(xy)$ a păstrat exact aceeaș formă: $\varphi_2(xy)$ a căpătat forma canonică

$$(31) \qquad \varphi_2(xy)=\sum_1^{n-1} a_p \Phi_p(x)\Psi_{p+1}(y)$$

constantele a_p absolut arbitrare însă diferite de zero.

Vom numì aceste noi funcțiuni *funcțiunile fundamentale relative la valoarea caracteristică* λ_1.

Celelalte funcțiuni se obțin din $\varphi_2(xy)$ prin iterație; vom aveà astfel

$$(32) \qquad \begin{aligned} \varphi_3(xy)&=\sum_1^{n-2} a_p a_{p+1}\Phi_p(x)\Psi_{p+2}(y)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_n(xy)&=a_1a_2\ldots a_p\Phi_1(x)\Psi_n(y)\\ \varphi_{n+1}(xy)&=0. \end{aligned}$$

Polul λ_1 este deci, în acest caz, un pol de ordinul n.

Sâmburele astfel obținut

$$(33) \qquad \frac{\varphi_n(xy)}{(-\lambda_1)^n}+\frac{\varphi_{n-1}(xy)}{(-\lambda_1)^{n-1}}+\ldots+\frac{\varphi_1(xy)}{-\lambda_1}$$

care admite sâmburele rezolvant

$$(33') \qquad \frac{\varphi_n(xy)}{(\lambda-\lambda_1)^n}+\frac{\varphi_{n-1}(xy)}{(\lambda-\lambda_1)^{n-1}}+\ldots+\frac{\varphi_1(xy)}{\lambda-\lambda_1},$$

va fi numit *sâmbure canonic de ordinul n.*

Soluțiuni fundamentale. Dacă înlocuim expresiunile (33) și (33') în ecuațiunile sâmburelui rezolvant

$$G(xy)-G(xy\lambda)=\lambda\int G(xs)Gsy\lambda)\,ds-\lambda\int G(xs\lambda)G(sy)ds.$$

Identificarea terminilor în $(\lambda-\lambda_1)^{-n}$ ne dă

$$\varphi_n(xy+\lambda_1\int G(xs)\varphi_n(sy)\,ds=0$$

$$\varphi_n(xy)+\lambda_1\int\varphi_n(xs)G(sy(\,ds=0.$$

Ținând seamă de expresia (32) a funcțiunii $\varphi_n(xy)$, aceste relațiuni ne arată că:

$\Phi_1(x)$ *este o soluție fundamentală a ecuației integrale date; iar* $\Psi_n(y)$ *o soluțiune fundamentală a ecuației asociate.* De

www.digibuc.ro

oărece rangul lui λ_1 este în acest caz egal cu 1, fiindcă $D(\lambda)$ n'are decât un singur divizor elementar, acestea vor fi și *singurele* soluțiuni.

In rezumat, deci, sâmburele canonic se bucură de proprietățile următoare:

Ordinul valorii caracteristice ca pol este egal cu multiplicitatea sa; rangul e egal cu unitatea. Expresiunea sa cu ajutorul funcțiunilor fundamentale conține $n-1$ constante arbitrare.

Așà, de ex., sâmburele canonic general de ordinul întâiu va fi

$$\frac{\Phi_1(x)\Psi_1(y)}{\lambda-\lambda_1}.$$

Acel de ordinul al doilea va fi:

$$\frac{\Phi_1(x)\Psi_1(y)+\Phi_2(x)\Psi_2(y)}{\lambda-\lambda_1}+\frac{a_1\Phi(x)\Psi_2(y)}{(\lambda-\lambda_1)^2},$$

și așà mai departe.

Pentru a găsì expresiunea sa generală cu ajutorul unui sistem de funcțiuni principale, va fi de ajuns a aplicà funcțiunilor fundamentale o substituțiune biortogonală oarecare.

10. **Funcțiuni fundamentale; cazul general.** Acum putem trece cu ușurință la cazul general. Să presupunem că determinantul $\Delta(\lambda)$ are r divizori elementari:

$$\lambda^n = \lambda^{n_1}.\lambda^{n_2}.\ldots.\lambda^{nr}$$

In acest caz determinantul canonic cu aceeași divizori elementari este

$$\begin{vmatrix} D_1 & & \\ & D_2 & \\ & & \ddots \\ & & & Dr \end{vmatrix}$$

$D_1\ D_2 \ldots Dr$ fiind determinanții canonici de forma (30) având respectiv ca singuri divizori elementari pe $\lambda^{n_1}, \lambda^{n_2}, \ldots \lambda^{nr}$. Vom aveà astfel

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & & \\ & \lambda a_2 & \\ & & \ddots \\ & & \lambda a^{n-1} \\ & & \lambda \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda b_1 & & \\ & \lambda b_2 & \\ & & \ddots \\ & & \lambda b^{n-1} \\ & & \lambda \end{vmatrix} \quad \ldots \quad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda l_1 & & \\ & \lambda l_2 & \\ & & \ddots \\ & & \lambda l^{n-1} \\ & & \lambda \end{vmatrix}$$

www.digibuc.ro

Forma canonică a lui $\varphi_2(xy)$ va fi deci în acest caz

$$\varphi_2(xy) = \sum_{p=1}^{r} \varphi_2^p(xy)$$

însemnând

$$\varphi^1{}_2(xy) = \sum_{p=1}^{n_1-1} a_p \Phi_p{}^1(x) \Psi^1{}_{p+1}(y)$$

$$\varphi_2{}^2(xy) = \sum_{1}^{n_2-1} b_p \Phi_p{}^2(x) \Phi^2{}_{p+1}(y)$$

. . . . . .

$$\varphi_{2r}(xy) = \sum_{1}^{n_n-1} l_p \Phi_p{}^r(x) \Psi^r{}_{p+1}(y)$$

Obținem deci în acest caz 2n funcțiuni principale speciale pe cari le vom numi și *funcțiuni fundamentale* [1]) cari se separ în r grupe de $2n_1$, $2n_2 \ldots 2n_r$, fiecare grup dând forma generatoare a unui sâmbure canonic respectiv de ordinul n_1, $n_2, \ldots n_r$. Intr'adevăr, dacă formăm pe $\varphi_3(xy)$, obținem:

$$\varphi_3(xy) = \varphi_3{}^1(xy) + \varphi_3{}^2(xy) + \ldots + \varphi_3{}^r(xy),$$

de oarece toate funcțiunile unui grup sunt ortogonale cu funcțiunile asociate ale celorlalte grupuri. Am căpătat astfel acest rezultat important:

In cazul general, sâmburele $G_1(xy)$ *este suma unui număr finit de sâmburi canonici, ortogonali între ei, de ordin* $n_1, n_2 \ldots n_r$. *Avem*

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$$

$$G_1(xy) = G_1{}^1(xy) + G_1{}^2(xy) + \ldots + G_1{}^r(xy). \qquad (34)$$

Ordinul lui λ_1 *ca pol este egal cu cel mai mare dintre numerele* $n_1\ n_2 \ldots n_r$; *dacă* m *este acest ordin, prima egalitate* (34) *ne dă evident*

$$n \leq m + r - 1.$$

Egalitatea n'are loc decât în două cazuri: dacă polul es e de primul ordin sau dacă nu este decât un singur sâmbure canonic de ordinul m, *ceilalți fiind toți de primul ordin.*

[1]) Funcțiunile asociate sunt acelea cari au ambii indici respectiv egali.

www.digibuc.ro

Soluțiuni fundamentale. Fiecare sâmbure canonic compunător are un singur grup de soluțiuni fundamentale distincte. Soluțiunea $\Phi_1^p(x)$ fiind ortogonală cu toate funcțiunile Ψ ale celorlalți sâmburi, vom aveà :

$$\int G_1^q(xs)\Phi_1^r(s)ds = o$$

pentru toate valorile lui q afară de p. Prin urmare, deoarece

$$\Phi_1^p(x) + \lambda_1 \int G_1^p(xs)\Phi_1^p(s)ds = o$$

vom aveà și

$$\Phi_1^p(x) + \lambda_1 \int G_1(xs) \cdot \Phi_1^p(s)ds = o.$$

Acelaș rațonament pentru $\Psi_n^p(y)$.

Ecuațiunea omogenă are deci în cazul general r *soluțiuni linear independente ; acestea sunt primele funcțiuni fundamentale* Φ *din fiecare grup.*

Ecuațiunea asociată se bucură de aceeaș proprietate : soluțiunile vor fi *ultimele* funcțiuni Ψ din fiecare grup.

Prin urmare, vedem din această analiză că printre funcțiunile fundamentale, există un sistem de *2r* funcțiuni cari sunt soluțiuni fundamentale ; dintre aceste *r* sunt soluțiuni ale ecuațiunii integrale date, iar *r* ale ecuațiunii asociate.

Să observăm încă :

Rangul valorii caracteristice este egal cu numărul sâmburilor canonici compunători.

11. **Cazul unui pol simplu.** — Când polul λ_1 este simplu, partea caracteristică a sâmburelui este numai

$$\frac{\varphi_1(xy)}{\lambda - \lambda_1}$$

în care

$$\varphi_1(xy) = \sum_{p=1}^{n} \varphi_p(x)\psi_p(y)$$

Sâmburele este deci în acest caz suma a *n* sâmburi canonici de ordinul întâiu. Funcțiunile $\varphi_1(x)\ \varphi_2(x) \ldots \varphi_p(x)$ sunt soluțiuni fundamentale ale ecuațiunii integrale date, iar $\psi_1(y), \psi_2(y) \ldots \psi_n(y)$ sunt soluțiuni fundamentale ale ecuațiunii asociate.

www.digibuc.ro

Prin urmare, în cazul unui pol simplu, *soluțiunile fundamentale coincid cu funcțiunile fundamentale.*

Din cauza acestei proprietăți importante, care caracterizează cazul unui pol simplu, este util a găsi un criterium care să permită a distinge acest caz.

Pentru aceasta, să observăm că dacă unul din sâmburii $G_1^p(xy)$ are un ordin mai mare ca unitatea, soluțiunile $\Phi^p(x)$ și $\Psi_{n_p}^p(y)$ sunt ortogonale, de oarece ele nu sunt funcțiuni fundamentale asociate ($n_p > t$). De acî rezultă că funcțiunea $\Phi_1^p(x)$ este ortogonală cu toate soluțiunile fundamentale ale ecuațiunii asociate. In cazul unui pol multiplu, există prin urmare soluțiuni fundamentale cari sunt ortogonale tuturor soluțiunilor fundamentale ale ecuațiunei asociate.

Această proprietate nu are loc când polul este simplu, căci la fiecare soluțiune $\Phi_p(x)$ corespunde soluțiunea asociată $\Psi_p(x)$; astfel în cât

$$\int \Phi_p(s)\Psi_p(s)ds = 1.$$

Deci, condițiunea necesară și suficientă pentru ca un pol să fie simplu este că la fiecare soluțiune $\Phi(x)$ să existe o altă soluțiune a ecuațiunii asociate așà fel ca

$$\int \Phi(s)\Psi(s)ds = 1.$$

12. **Cazul unui pol multiplu.** In cazul unui pol multiplu, să scrim sâmburele canonic de ordinul n sub forma:

$$\Phi_1(xy) + \Phi_2(xy)$$

însemnând

$$\Phi_1(xy) = \frac{\sum_1^n \varphi_p(x)\,\psi_p(y)}{\lambda_1}$$

parte care se prezintă și în cazul unui pol simplu.

Cealaltă parte $\Phi_2(xy)$ *este un sâmbure fără constantă caracteristică.* Intr'adevăr, dacă formăm diferiții sâmburi iterați ai lui $\Phi_2(xy)$, este evident că aceștia vor fi compuși din sâmburi iterați ai lui $\Phi_2(xy)$ de ordin $\geq n-1$, în virtutea proprietăților funcțiunilor $\varphi_p(xy)$.

www.digibuc.ro

Această observaţie are consecinţa următoare:

Dacă un sâmbure are un număr finit de valori caracteristice de multiplicităţi oarecare, el va puteà totdeauna fi scris sub forma:

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\varphi_\mu(x)\psi_\mu(y)}{\lambda_\mu} + E(xy).$$

E(xy) fiind un sâmbure fără constantă caracteristică.

Intr'adevăr, diferitele părţi $\Phi_2(xy)$ pe cari le obţinem de la valorile caracteristice λ_μ sunt ortogonale între ele şi ortogonale sâmburelui fără constantă caracteristică adăugat la forma normală.

13. **Teorema a doua a d-lui Fredholm.** Această teoremă este aproape stabilită în paragrafele precedente. Este suficient de a arătà încă că ecuaţiunile

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int N(xs)\,\varphi(s)\,ds = o \tag{36}$$

şi

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int G_1(xs)\,\varphi(s)\,ds = o \tag{37}$$

sunt *reciproce.*

Pentru aceasta, să observăm mai întâiu că pentru o soluţiune $\varphi(x)$ a ecuaţiunii (37) vom aveà

$$\int P_1(xs)\varphi(s)\,ds = o,$$

de oarece înmulţind ecuaţia (37) cu $P_1(yx)\,dx$ şi integrând, obţinem tocmai această relaţiune, în virtutea proprietăţii de ortogonalitate a sâmburilor $P_1(xy)$ şi $G_1(xy)$.

Prin urmare, vom aveà:

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int [G_1(xs) + P_1(xs)]\,\varphi(s)ds = o,$$

care e tocmai relaţia (36).

www.digibuc.ro

Reciproc, să scrim ecuaţia (36) sub forma

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int P_1(xs)\varphi(s)ds = -\lambda_1 \int G_1(xs)\varphi(s)ds.$$

De oarece λ_1 nu mai este valoare caracteristică a sâmburelui $P_1(xy)$, vom puteà rezolvà această ecuaţiune, ceeace ne dă:

$$\varphi(x) = -\lambda_1 \int G_1(xs)\varphi(s)ds + \lambda_1 \int P_1(xs\lambda)G_1(st)\varphi(f)dsdt,$$

adică tocmai ecuaţia (37), de oarece al doilea termen din membrul al doilea este şi el nul în virtutea proprietăţii de ortogonalitate.

Obţinem astfel teorema următoare:

Dacă λ *este egal cu o valoare caracteristică* λ_1 *de multiplicitate* n *şi de rang* r, *ecuaţia lui Fredholm omogenă va admite* r *soluţiuni linear independente, numite soluţiuni fundamentale.*

Ecuaţiunea asociată are exact acelaş număr de soluţiuni fundamentale. Aceasta este teorema a doua a d-lui Fredholm.

14. **Teorema a treia a d-lui Fredholm.** Raţionamentul precedent ne arată că şi ecuaţiunile

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int N(xs)\varphi(s)\,ls = f(x)$$

şi

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int G_1(xs)\varphi(s)\,ls \qquad f(x)$$

sunt de asemenea reciproce: ele deci vor fi compatibile în acelaş timp.

Prin urmare, aplicând un rezultat dejà stabilit relativ la ultima ecuaţiune:

Condiţiunea necesară şi suficientă pentru ca o ecuaţiune a lui Fredholm cu membrul al doilea f(x) *să fie rezolubilă pentru o valoare caracteristică* $\lambda - \lambda_1$, *este ca* f(x) *să fie ortogonal tuturor soluţiunilor fundamentale ale ecuaţiunii asociate, relative la* λ_1.

Aceasta este teorema a treia a d-lui Fredholm.

www.digibuc.ro

IV. DESVOLTĂRI DIVERSE

15. **Construirea unui sâmbure având un număr finit de valori caracteristice.** Rezultatele capitolului precedent ne permit de a trata acum problema următoare :

Să se determine forma cea mai generală a unui sâmbure cu n *valori caracteristice de multiplicitate şi rang date.*

Pentru aceasta să facem întâiu observaţia următoare, cuprinsă de fapt într'o teoremă dejà stabilită :

Părţile unui sâmbure, care corespund la două valori caracteristice diferite, sunt ortogonale între ele. Intr'adevăr, dacă însemnăm :

$$N(xy) = G_1(xy) + G_2(xy) + Q(xy)$$

sâmburele $G_1(xy)$, ortogonal cu $G_2(xy) + Q(xy$, va fi ortogonal şi cu $Q(xy)$. De acî rezultă că sâmburii $G_1(xy)$ şi $G_2(xy)$ vor fi de asemenea ortogonali.

Să însemnăm prin $G_p(xy)$ sâmburele general corespunzător unei valori caracteristiee λ_p de multiplicitate şi rang date, sâmbure pe care ştim să-l construim. Este evident că expresiunea.

$$G_1(xy) + G_2(xy) + \ldots + G_n(xy) + E(xy)$$

în care $E(xy)$ reprezintă un sâmbure *fără constantă caracteristică* va fi sâmburile căutat, cu condiţie ca diferitele sale părţi să fie ortogonale între ele, după cum rezultă din observarea precedentă. Pentru aceasta, e de ajuns mai întâiu ca funcţiunile fundamentale, cari servesc pentru construirea sâmburilor $G_p(xy)$, să formeze în ansamblu un singur sistem biortogonal ; funcţiunea $E(xy)$ trebuie după aceea şi ea să fie ortogonală tuturor sâmburilor $G_p(xy)$.

16. **Cazul unui număr infinit de valori caracteristice.** Raţionamentul precedent se generalizează în mod evident şi pentru cazul unui număr infinit de valori caracteristice, cu condiţie ca seria

$$\sum^{\infty} G_p(xy)$$

să fie convergentă şi integrabilă în raport cu variabilele x şi y. O

www.digibuc.ro

condiţiune necesară pentru aceasta, este ca exponentul de convergenţă al valorilor caracteristice să fie cel mult egal cu 2; cu alte cuvinte, seria $\sum 1/\lambda_n^2$ trebuie să fie convergentă.

Nu s'a putut demonstrà până acum că această condiţiune este suficientă, nici nu s'au formulat condiţiunile necesare şi suficiente.

17. **Sâmbure fără constantă caracteristică.** Sâmburele

$$\varphi_2(xy) = a_1\Phi_1(x)\Psi_2(y) + \ldots + a_{n-1}\Phi_{n-1}(x)\Psi_n(y)$$

ne-a dat dejà un exemplu de sâmbure fără valoare caracteristică. In mod mai general, dacă seria

$$E(xy) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x)\Psi_{n+1}(y)$$

converge uniform, va constituì de asemenea un sâmbure fără valoare caracteristică, căci toate urmele sale sunt nule; funcţiunile Φ şi Ψ formează, bine înţeles, cele două grupe ale unui sistem biortogonal. Aplicând funcţiunilor Φ şi Ψ o substituţie biortogonală oarecare, vom obţine astfel o clasă foarte întinsă de sâmburi fără constante caracteristice. Iată câteva exemple:

Să luăm

$$\Phi_n(x) = \cos nx\ ,\ \Psi_n(y) = \cos ny \text{ şi } \sum |a_n| = A$$

obţinem sâmburele [1])

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos(n+1)y$$

In acelaş mod să considerăm $\Phi_{2n}(x) = \Psi_{2n}(x) = \sin nx$ şi $\Phi_{2n+1}(x) = \Psi_{2n+1}(x) = \cos nx$; obţinem sâmburele [1]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \sin ny.$$

---

[1]) E. Goursat. M. Cité. (Ann. de Toulouse, pag. 87—88).

www.digibuc.ro

CAP. III

SÂMBURI SPECIALI

I. SÂMBURELE SIMETRIC

1. D-l D. Hilbert are meritul de a fi pus în evidenţă rolul simetriei sâmburelui în teoria ecuaţiilor integrale. D-sa a studiat complet acest caz; elevii săi, d-l E. Schmidt, în particular, l-au ajutat a da rezultatelor obţinute o formă şi demonstraţiuni simple şi elegante, pe o cale directă. In această lucrare toate rezultatele relative la sâmburele simetric decurg imediat din teoria generală.

2. **Teorema d-lui D. Hilbert.** *Orice sâmbure simetric are cel puţin o valoare caracteristică.*

Această teoremă a fost stabilită pentru întâia oară de d-l D. Hilbert [1]); D-l E. Schmidt i-a dat o demonstraţie direct, luând-o ca teoremă fundamentală [2]).

Pentru demonstraţie este suficient de a observà că $n_4 \neq 0$. Intr'adevăr:

$$n_4 = \int N_1(s_1 s_2)^2 ds_1 ds_2.$$

Dar sâmburele $N_1(s_1 s_2) = \int N(s_1 s) N(s s_2) ds$ nu poate fi identic nul în tot pătratul de integrare, fiindcă în particular, pentru $s_1 = s_2$, avem

$$N_1(s_1 s_1) = \int [N(s_1 s)]^2 ds.$$

Prin urmare, avem într'adevăr $n_4 \neq 0$.

Această teoremă se poate enunţà şi astfel:

Un sâmbure fără constantă caracteristică nu poate fi simetric.

Observaţie. La enunţarea acestei teoreme nu ţinem socoteală de sâmburii discontinui, cari sunt egali cu zero, *aproape* [3]) în tot intervalul de integrare; pentru asemenea sâmburi teorema precedentă nu mai este adevărată. Să luăm de ex. sâmburele, nul pre-

---

[1]) D. HILBERT, Grundzüge I. Mitt. (pag. 72).

[2]) E. SCHMIDT. Entwicklung willk. Functionen I. Teil (Mah. Ann. Bd. 63, pag. 455).

[3]) Ne vom folosi de această copresiune, întrebuinţată de d l PLANCHEREL, pentru a înlocui perifraza «afară de un ansamblu de o întindere nulă».

www.digibuc.ro

tutindeni în pătratul (01,01) afară de diagonala (0,1) şi un număr finit de perechi de drepte, paralele cu axele, întâlnindu-se pe diagonală, unde sâmburele are valori pozitive. Pentru acest sâmbure avem :

$$n_1 \quad \int N(ss)ds \qquad a^2,$$

dar

$$n_2 \quad \int N(s_1 s_1)^2 \, ls_1 ds_2 = 0$$

de oarece funcţiunea $N(s_1 s_2)$ nu este diferită de zero decât pe un număr finit de drepte; în acelaş mod $n_p = 0$ $(p>2)$, prin urmare, $D(\lambda) = e^{a^2\lambda}$.

3. **Proprietăţile valorilor caracteristice.**

a) *Valorile caracteristice sunt reale.* Să presupunem într'adevăr că λ ar fi complex şi fie $\varphi_1(x)$ o soluţiune fundamentală relativă la acest pol. Sâmburele N(xy) fiind real, $\overline{\lambda}_1$ [1]) va fi de asemenea o valoare caracteristică a sâmburelui, iar $\overline{\varphi}_1(x)$ o soluţiune fundamentală relativă, atât pentru ecuaţia dată, cât şi pentru ecuaţia asociată. Dacă acum am avea : $\lambda_1 \neq \lambda_1$, ar trebui să avem şi

$$\int \varphi_1(s)\varphi_1(s)ds \neq 0,$$

ceeace este imposibil. Prin urmare, în mod necesar, avem $\lambda_1 \equiv \lambda_1$, adică λ_1 real.

b) *Polurile sâmburelui rezolvant sunt simple,* căci o soluţiune fundamentală $\varphi_1(x)$ este soluţiune fundamentală şi pentru ecuaţia asociată. Însă :

$$\int \varphi_1^2(s)ds \neq 0.$$

Prin urmare, în virtutea criteriului privitor la ordinul polurilor, polurile vor fi simple.

c) Funcţiunile fundamentale coincid astfel cu soluţiunile fundamentale ; şi, de oarece din cauza simetriei, soluţiunile fundamentale sunt aceleaşi şi pentru ecuaţia asociată, rezultă că *funcţiunile fundamentale formează un singur sistem ortogonal.*

www.digibuc.ro

d) *Orice sâmbure simetric, având un număr finit de valori caracteristice, este neapărat de forma*

$$(1) \qquad \frac{\varphi_1(x)\psi_1(y)}{\lambda_1} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n} :$$

ficcare valoare caracteristică este scrisă de un număr de ori egal cu rangul său.

Intr'adevăr, dacă extragem din N(xy) partea caracteristică polurilor $\lambda_1 \ldots \lambda_p$, care e tocmai expresia (1), rămâne un sâmbure tot simetric, care prin ipoteză nu mai are nici o valoare caracteristică; în virtutea teoremei d-lui D. Hilbert, acest rest va fi nul.

4. Inegalitatea lui Bessel. *Fiind dat un sistem ortogonal de funcțiuni* $\varphi_p(x)$ *și* $f(x)$ *o funcțiune al cărei pătrat este integrabil, avem inegalitatea:*

$$C_1^2 + C_2^2 + C_n^2 < \int f^2(x)dx$$

C_p *fiind coeficientul lui Fourier* $C_p = \int f(s)\varphi_p(s)ds.$

Să observăm mai întâiu că C_p există; într'adevăr avem

$$2f(s)\varphi_p(s) < f^2(s) + \varphi_p(s)$$

și prin urmare

$$2\int f(s)\varphi_p(s)\,ds < 1 + \int f^2(s)\,ds$$

Acest punct fiind stabilit, inegalitatea lui Bessel rezultă din egalitatea evidentă:

$$\int [f(s) - c_1\varphi_1(s) - c_2\varphi_2(s) \ldots - e_n\varphi_n(s)]^2 ds =$$
$$\int f^2(s)\,ds - [c_1^2 + c_1^2 + \ldots + c_2^2],$$

de oarece primul membru al acestei egalități este evident pozitiv. Deducem de aci observația importantă:

Fiind dată o funcțiune reală, al cărei pătrat este integrabil, seria formată de pătratele coeficienților săi dintr'o serie Fourier, este convergentă.

[1]) $\bar{\lambda}_1$ reprezintă cantitatea imaginar conjugată lui λ_1

www.digibuc.ro

5. **Desvoltarea unei funcţiuni arbitrare în serie de funcţiuni fundamentale.** (Hilbert-Schmidt). *Orice funcţiune* f(x) *de forma :*

$$\int N(xs)h(s)ds$$

este desfăşurabilă într'o serie complet convergentă de funcţiuni fundamentale ale sâmburelui N(xy); *funcţiunea* h(x) *şi* N(xy) *sunt funcţiuni al căror pătrat este integrabil.*

Coeficientul lui Fourier este :

$$C_n = \int N(st)\varphi_n(t)h(s)dsdt = \frac{1}{\lambda_n}\int \varphi_n(s)h(s)ds = \frac{h_n}{\lambda_n}\ ^1),$$

astfel că dacă teorema ar fi adevărată, desvoltarea căutată ar fi :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n \varphi_n(x)}{\lambda_n}$$

Vom demonstrà mai întâiu convergenţa acestei serii. Pentru aceasta, să observăm că :

$$R_n^2 = \left| \frac{h_n \varphi_n(x)}{\lambda_n} + \ldots + \frac{h_m \varphi_m(x)}{\lambda_m} \right|^2 \leq [h_n^2 + \ldots + h_m^2] \left[\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} + \ldots + \frac{\varphi_m^2(x)}{\lambda_m^2}\right].$$

Insă expresia $\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} = \int N(xs)\,ls$ este coeficientul lui Fourier al funcţiunii în y N(xy); în virtutea inegalităţii lui Bessel, paranteza doua este deci mai mică ca $\int N(xs)^2 ds$ şi, prin urmare, mai mică decât o cantitate finită A. Prin urmare avem :

$$R_n^2 < A[h_n^2 + \ldots + h_m^2],$$

ceeace demonstrează convergenţa absolută şi uniformă.

Rămâne acum de demonstrat că aceasta serie reprezintă pe f(x); vom stabilì pentru aceasta că funcţiunea :

$$R(x) = f(x) - S(x) \qquad (2)$$

este identic nulă.

---

[1]) In acest capitol vom scrie semnul — înaintea integralei în ecuaţia lui Fredholm.

www.digibuc.ro

Funcţiunea R(x) este ortogonală cu toate funcţiunile fundamentale, în virtutea construcţiunii seriei S(x). Avem prin urmare:

$$\int R^2(s)ds = \int f(s)R(s)ds - \int S(s)R(s)ds = \int f(s)R(s)ds$$
$$= \int R(s)N(st)h(t)dsdt = \int h(t)\int N(st)R(s)ds = o,$$

de oarece

$$\int R(s)N(st)ds \equiv o\ ^1),$$

Deci

$$R(s) \equiv o.$$

6 Sâmbure închis (fermé, abgeschlossen). Un sâmbure simetric este închis dacă nu există nici o funcţiune h(x), astfel ca să avem identic:

$$(2') \qquad \int N(xs)h(s)ds = o$$

Sistemul funcţiunilor fundamentale ale unui sâmbure simetric închis este complect şi viceversa. Intr'adevăr, identitatea (2) şi relaţiunile $\int \varphi_n(s)h(s)ds = o$ sunt reciproce, după cum rexultă din raţionamentul făcut în notă, la teorema D-lor D. Hilbert şi Schmidt.

Numărul valorilor caracteristice ale unui sâmbure închis este infinit. Intr'adevăr, dacă ar fi finit, numărul funcţiunilor fundamentale ar fi şi el finit; însă un sistem complet de funcţiuni ortogonale nu poate niciodată să fie finit.

---

[1]) Această relaţiune ar fi imediată, dacă seria sâmburelui ar fi convergentă.
O putem demonstrà pe altă cale în modul următor:
Relaţia (2) ne permite să scrim:

$$\int R(s)N(st)ds = \int f(s)N(s)ds - \int N(st)S(s)ds$$
$$(3') \qquad \int N_1(st)h(t)dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n\varphi_n(x)}{\lambda_n^2}.$$

Insă avem.

$$N_1(st) = \frac{\phi_1(x)\phi_1(y)}{\lambda_1^2} + \quad + \frac{\phi_n(x)\phi_n(y)}{\lambda_n^2} + \cdots$$

seria din membrul al doilea fiind complet convergentă, de oarece: $N_1(xy) = \int N(xs)N(sy)ds$
De acì rezultă că:

$$\int N_1(st)h(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n\phi_n(x)}{\lambda_n^2};$$

cu alte cuvinte, membrul al doilea al relaţiei (3) este nul,

www.digibuc.ro

7. Sâmbure definit. Vom spune că *un sâmbure* N(xy) *este definit dacă nu există nici o funcţiune* h x), *astfel că :*

$$(3) \qquad \int N(xy)h(x)h(y)dxdy \quad o$$

Un sâmbure definit este neapărat închis, căci dacă

$$\int N(xs)h(s)ds = o$$

condiţia (3) ar fi evident împlinită pentru h(x).

Valorile caracteristice ale unui sâmbure definit sunt toate de acelaş semn. Intr'adevăr, să presupunem că valorile λ_n şi λ_m ar fi de semne contrare; dacă luăm atunci

$$h(x) \quad a\varphi_n(x) + b\varphi_m(x)$$

obţinem

$$(4) \qquad \int N(xy)h(x)h(y)\,lxdy = \frac{a^2}{\lambda_n} + \frac{b^2}{\lambda_m}.$$

De oarece cantităţile λ_n şi λ_m sunt de semne contrare, membrul al doilea al relaţiei (4) poate deveni nul pentru valori convenabil alese, date lui *a* şi *b;* deci în acest caz sâmburele N(xy) n'ar fi definit.

Orice sâmbure iterat al unui sâmbure închis, este definit. Să luăm într'adevăr $N_1(xy) = \int N(xs)Nsy)ds$. Nu putem avea

$$\int N_1(xy)h(x)h(y)\,lxdy = o,$$

căci am deduce

$$\int [N(xs)h(x)\,lx]^2 ds;$$

de unde

$$\int N(xs)h(x)dx = o.$$

8. Sâmbure positiv; sâmbure quasi definit. *Un sâmbure* N(xy) *se numeşte pozitiv când pentru orice funcţiune* h(x) *avem :*

$$\int N(xy)h(x)h(y)dxdy > o.$$

Valorile caracteristice ale unui sâmbure pozitiv sunt toate pozitive. Intr'adevăr dacă ne referim la raţionamentul făcut la No. 7, membrul al doilea al relaţiei (4) poate să devină şi negativ, pentru valori ale lui *a* şi *b* convenabil alese, dacă λ_n şi λ_{pe} ar fi de

www.digibuc.ro

semne contrare. Un exemplu de sâmbure quasi-definit este seria convergentă :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n},$$

în care λ_n reprezintă cantităţi pozitive, iar $\varphi_n(x)$ un grup extras dintr'un sistem ortogonal.

Două cazuri se pot întâmplà :

Numărul funcţiunilor h(x) pentru cari avem

$$(5) \qquad \int N(xy)h(x)h(y)dn\,ly = o,$$

poate să fie finit sau infinit. In primul caz vom spune că sâmburele este *quasi-definit*. Această numire se justifică prin faptul că, în acest caz, sâmburele este de forma :

$$N(xy) = G(xy) - C_1h_1(x)h_1(y) - C_2h_2(x)h_2(y) + \ldots C_ph_p(x)h_p(y)$$

G(xy) reprezentând un sâmbure definit, iar p un număr finit. Intr'adevăr, dacă $h_1(x), \ldots h_p(x)$ reprezintă funcţiunile, în număr finit, pentru care egalitatea (5) este verificată, iar $C_1 \ldots C_p$ nişte cantităţi pozitive, este evident că expresiunea

$$N(xy) + C_1h_1(x)h_1(y) + \ldots + C_ph_p(x)h_p(y)$$

nu va mai verificà relaţia (5) pentru nici o funcţiune h(x), şi va fi, prin urmare, un sâmbure definit.

Sâmburii quasi-definiţi au şi ei prin urmare o infinitate de valori caracteristice, toate pozitive.

II. SÂMBURELE SIMETRIC STRÂMB

9. **Un sâmbure N(xy) este simetric strâmb dacă avem**

$$N(xy) \equiv -N(xy).$$

Sâmburii simetrici strâmbi joacă în teoria ecuaţiunilor diferenţiale lineare de ordin impar, acelaş rol ca sâmburii simetrici în teoria ecuaţiunilor diferenţiale lineare de ordin par.

10. **Propietăţi ale valorilor caracteristice.** a) *Valorile caracteristice sunt imaginare pure, de forma* $\pm\nu i$. Intr'adevăr, fie λ_1

www.digibuc.ro

o valoare caracteristică și $\varphi_1(x)$ o soluțiune fundamentală relativă. Avem :

$$\varphi_1(x) - \lambda_p \int N(xs)\varphi_1(s)ds = o,$$

de unde deducem

$$\varphi_1(x) + \lambda_1 \int N(sx)\varphi_1(s)\, ls = o$$

și, prin urmare,

$$\overline{\varphi}_1(x) + \overline{\lambda}_1 \int N(sx)\overline{\varphi}_1(s)\, ls = o.$$

Dacă deci $\lambda_1 \neq -\lambda_1$, funcțiunile $\varphi_1(x)$ și $\overline{\varphi_1}(x)$ ar fi ortogonale, ceeace e imposibil. Prin urmare, trebuie să avem în mod necesar $\lambda_1 \equiv -\lambda_1$ și prin urmare $\lambda_1 = \pm vi$.

b) *Polurile sunt simple.* Intr'adevăr, dacă

$$\varphi_1(x) - vi \int N(xs)\varphi_1(s)ds = o$$

vom aveà de asemenea

$$\overline{\varphi}_1(x) - vi \int N(sx)\overline{\varphi}_1(s)ds = o.$$

De acì rezultă că la orice soluțiune $\varphi_1(x)$ corespunde soluția asociată $\varphi_1(x)$, astfel că

$$\int \varphi_1(s)\overline{\varphi}_1(s)ds \neq o,$$

ceeace arată că polurile sunt simple.

c) *Fiecare sâmbure simetric strâmb are cel puțin doă valori caracteristice.* Intr'adevăr, mai întâiu există cel puțin o valoare caracteristică, fiindcă :

$$n_1 = \int [\, N_1(s_1 s_2)\,]^2 ds_1\, ls \neq o,$$

de oarece $N_1(ss_1) = -\int [\, N(ss_1)\,]^2 ds$ nu poate fi identic nul.

De acì rezultă că avem cel puțin două, fiindcă toate rădăcinile sunt câte două imaginar conjugate.

Această teoremă se poate enunțà și astfel :

Un sâmbure fără constantă caracteristică nu poate fi simetric strâmb.

d) *Dacă $\varphi_1(x)$ este o funcțiune fundamentală, $\overline{\varphi}_1(x)$ este funcțiunea fundamentală asociată.*

www.digibuc.ro

Polurile fiind simple, totalitatea funcţiunilor fundamentale coincide cu acea a soluţiunilor fundamentale. Dacă $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$... $\varphi_n(x)$ sunt n soluţiuni linear independente corespunzătoare la valoarea λ, de rang n, funcţiunile

$$\overline{\varphi}_1(x) \cdot \overline{\varphi}_2(x), \ldots \quad \overline{\varphi}_n(x)$$

vor fi n soluţiuni de asemenea linear independente ale ecuaţiunii asociate.

Să căutăm acum a le biortogonalizà după metoda dejà indicată. Să observăm pentru aceasta mai întâiu că vom puteà luà $\Phi_1(x)=\varphi_1(x)$ şi $\Psi_1(x) = \overline{\varphi}_1(x)$ de oarece $\int \varphi_1(s)\overline{\varphi}_1(s)ds \neq 0$; pe de altă parte constantele a_i şi b_i sunt respectiv imaginar conjugate, de oarece dacă

$$\int \varphi_1(s)\,[\,\overline{\varphi}_p(s) - c_p\varphi_1 s)\,]\,ds = 0,$$

vom aveà şi

$$\int \overline{\varphi}_1's)\,[\,\varphi_p(s) - \overline{c}_p\varphi_1(s)\,]\,ds = 0.$$

Funcţiunile rămase vor fi deci de aceeaş formă

$$\varphi'_2(x)\ \ \varphi'_3(x)\ldots\ \varphi'_n(x)$$
$$\overline{\varphi}'_2(x)\ \ \overline{\varphi}'_3(x)\ldots\ \overline{\varphi}'_n(x).$$

Vom puteà deci repetà acelaş procedeu, ceeace stabileşte proprietatea enunţată.

e) *Orice sâmbure simetrie strâmb având un număr finit de valori caracteristice este neapărat de forma*

$$\frac{\varphi_1(x)\,\overline{\varphi}_1(y)}{\lambda_1} + \ldots \quad \ldots + \frac{\varphi_n(x)\,\overline{\varphi}_n(y)}{\lambda_n}$$

scriind ficcare rădăcină de atâtca ori câte unităţi sunt în rangul său.

Pentru a demonstrà această teoremă vom face mai întâiu observaţia că dacă extragem dintr'un sâmbure simetric strâmb părţile caracteristice relative la două valori caracteristice conjugate $\pm vi$, rămâne un sâmbure care este tot simetric strâmb. Intr'adevăr, fie:

$$\frac{\varphi_1(x)\ \overline{\varphi}_1(y) + \ldots \quad + \varphi_n(x)\cdot\varphi_n(y)}{vi}$$

www.digibuc.ro

partea caracteristică a valoarei νi; acea relativă la — νi va fi atunci

$$\overline{\varphi}_1(x)\varphi_1(y) \qquad + \overline{\varphi}_n(x)\varphi_n(y)$$
$$- \nu i$$

și aceste două părți reunite împreună dau

$$\underline{\varphi_1(x)\overline{\varphi}_1(y)} - \varphi_1(x)\overline{\varphi}_1(y) + \ldots \quad \underline{+ \varphi_n(x)\overline{\varphi}_n(y) - \overline{\varphi}_n(x)\varphi_n(y)},$$
$$\nu i$$

adică o expresiune simetric strâmbă.

Dacă, prin urmare vom extrage dintr'un sâmbure, care are un număr finit de valori caracteristice, părțile caracteristice ale tuturor acestor valori, vom obține ca rest un sâmbure simetric strâmb fără valoare caracteristică, care în virtutea proprietății c) va fi identic nul.

Vom cită ca exemplu de sâmbure simetric strâmb sâmburele sin n(x—y) care în intervalul $(0,2\pi)$ are funcțiunile fundamentale $e^{\pm nxi}$ corespunzătoare la valorile caracteristice $\mp \frac{i}{2\pi}$.

11. Inegalitatea lui Bessel. In domeniul complex putem obține o inegalitate analoagă cu aceea a lui Bessel.

Fiind dat sistemul de funcțiuni fundamentale

$$\varphi_1(x)\ \overline{\varphi}_1(x)\ \varphi_2(x)\ \overline{\varphi}_2(x)\ldots \qquad \varphi_n(x)\ \overline{\varphi}_n(x)\ldots$$

ale unui sâmbure simetric strâmb, avem:

$$c_1|^2 + |c_2|^2 + \ldots \qquad + |c_n|^2 < \int f(s)^2 ds$$

în care

$$c_n = \int f(s)\overline{\varphi}_n(s)ds.$$

Această inegalitate rezultă din relația evidentă

$$\int [f(s) - c_1\varphi_1(s) - \overline{c}_1\overline{\varphi}_1(s) - \ldots \quad - c_n\varphi_n(s) - \overline{c}_n\overline{\varphi}_n(s)] \cdot$$

$$[f(s) - \overline{c}_1\varphi_1(s) - c_1\overline{\varphi}_1(s)\ldots]ds = \int f(s)^2 ds \quad |c_1|^2 - \ldots \quad - |c_n|^2,$$

de oarece membrul întâiu este o cantitate esențial pozitivă.

12. Desvoltarea în serie de funcțiuni fundamentale.

Orice funcțiune f(x) *de forma* $\int N(xs)h(s)ds$ *este desfășurabilă într'o serie complect convergentă de funcțiuni fundamen-*

www.digibuc.ro

tale; funcțiunea h(x) *și sâmburele sunt funcțiuni al căror pătrat este integrabil.*

Coeficienții generali ai lui Fourier sunt:

$$C_n = \int N(ts)h(s)\bar{\varphi}_n(t)dsdt - \frac{-1}{\bar{\lambda}_n}\int h(s)\bar{\varphi}_n(s)ds = \frac{-h_n}{\lambda_n} \quad \frac{h_n}{\lambda_n},$$

și prin urmare

$$C_n = \frac{h_n}{\lambda_n}$$

astfel încât, dacă teorema ar fi adevărată, desvoltarea căutată ar fi:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{h_n\varphi_n(x)}{\lambda_n} + \frac{\bar{h}_n\bar{\varphi}_n(x)}{\bar{\lambda}_n}\right],$$

Convergența complectă a acestei serii se deduce din relația [1]):

$$S_m(x) - S_n(x) < 4\left[|h_n|^2 + |h_{n+1}|^2 + \ldots + |h_m|^2\right]$$
$$\left(\left|\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m}\right|^2\right)$$

Demonstrația se isprăvește întocmai ca în cazul sâmburelui simetric. In mod analog, în virtutea proprietăților c) și e), rezultă că un sâmbure simetric strâmb *închis* are o *infinitate de valori caracteristice.*

III. SÂMBURELE SIMETRIZABIL

13. **Definițiuni, exemple.** Vom spune că *un sâmbure este simetrizabil dacă îl putem face simetric prin compunerea cu un sâmbure simetric definit.*

Sâmburele N(xy) este simetrizabil dacă există un sâmbure simetric *definit* G(xy) astfel ca

$$\text{(a) } H_1(xy) = \int G(xs)N(sy)ds \quad \text{sau (b) } H_2(xy) = \int N(xs)G(sy)ds$$

să fie deasemenea simetric.

---

[1]) Această inegalitate este o aplicație a inegalității

$$(A_1\bar{B}_1 + \bar{A}_1B_1 + \ldots + A_n\bar{B}_n + B_n\bar{A}_n)^2 < 4(A_1\bar{A}_1 + \ldots + A_n\bar{A}_n)(B_1\bar{B}_1 + \ldots + B_nB_n),$$

care se obține exprimând că forma quadratică în λ:

$$(A_1 + B_1)(\bar{A}_1\lambda + B_1) + \ldots + (A_n\lambda + B_n)(\bar{A}_n\lambda + \bar{B}_n)$$

este definită și pozitivă.

www.digibuc.ro

Această clasă de sâmburi a fost semnalată de D-l J. Marty [1]; ea conţine toţi sâmburii speciali studiaţi până acum. Aşa, de exemplu, sâmburele de forma [2]) (Hilbert)

$$A(x)G(xy)$$

— G(xy) simetric şi definit — e un sâmbure simetrizabil, de oarece sâmburele

$$\int G(xs)A(s)G(sy)ds$$

este simetric.

In mod mai general, sâmburele A(x)G(xy)B(y (Goursat) este de asemenea simetrizabil, de oarece prin compunerea sa înainte cu sâmburele B(x)G(xy)B(y) obţinem iarăş un sâmbure simetric.

Să cităm în sfârşit sâmburele $\int N(xs)G(sy)ds$ (Marty) în care G(xy) şi N(xy) sunt simetrici, iar unul din ei definit; dacă G(xy) este definit, sâmburele considerat devine simetric prin compunerea cu G(xy).

14. Soluţiunile fundamentale asociate. Pentru sâmburii simetrizabili următoarea observaţie este de primă importanţă.

Dacă $\varphi_1(x)$ *este o soluţiune fundamentală a ecuaţiei integrale date, expresiunea*

$$\psi_1(x) = \int G(xs)\varphi_1(s)ds$$

este o soluţiune fundamentală a ecuaţiei integrale asociate.

Intr'adevăr, să înmulţim relaţia:

$$\varphi_1(t) - \lambda_1 \int N(ts)\varphi_1(s)ds = o$$

cu G(xt)dt şi să integrăm; se obţine

$$\psi_1(x) - \lambda_1 \int G(xt)N(ts)\varphi_1(s)dsdt = o$$

---

[1]) J. Marty. Sur une équation intégrale CR. T. 150. 1910, pag. 515.
» Développement suivant certaines solutions singulières. Ibid. pag. 605.
» Existence des solutions singulières pour certaines équations de Fredholm. Ibid. pag. 1031.
» Valeurs singulières d'une équation de Fredholm. Ibid. pag. 1499.

[2]) D. Hilbert. Grundzüge etc. 5te Mitt. (pag. 462—472). D-l D. Hilbert a studiat în mod complet sâmburii de acest tip, funcţiunea A(x) putând avea un număr finit de schimbări de semn; şcoala germană numeşte ecuaţia integrală corespunzătoare ecuaţie integrală *polară*.

www.digibuc.ro

sau, în virtutea *simetriei* lui H(xy)

$$\psi_1(x) - \lambda_1 \int G(st)N(tx)\varphi_1(s)dsdt = o$$

sau, încă, ţinând seama şi de simetria lui G(xy):

$$\psi_1(x) - \lambda_1 \int N(tx)\psi_1'(t)dt = o$$

Observaţie. O demonstraţie analoagă ne arată că aceeaş teoremă subsistă şi pentru sâmburii de tipul (b); trebuie schimbate între ele cuvintele »date» şi »asociate«.

15. Proprietăţile valorilor caracteristice. a) *Valorile caracteristice sunt reale.* Într'adevăr, dacă λ_1 este o valoare caracteristică, având pe $\varphi_1(x)$ ca o soluţiune fundamentală, $\overline{\lambda_1}$ va fi de asemenea valoare caracteristică; iar $\overline{\varphi_1}(x)$ va fi o soluţiune fundamentală a ecuaţiei asociate. Dacă, prin urmare, $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_1}$, ar trebui să avem:

$$\int G(ts)\varphi_1(s)\overline{\varphi_1}(t)dt = o,$$

ceeace este imposibil, căci dacă avem

$$\varphi_1(x) = p(x) + ig(x)$$

obţinem

$$\int G(st)p(s)p(t)dt + \int G(st)q(s)q(t)dsdt = o$$

rezultat incompatibil cu ipoteza că G(xy) este definit.

d) *Dacă* $\varphi_1(x)$ *este o soluţie fundamentală, expresiunea* $\psi_1(x) = \int G(xs)\varphi_1(s)ds$ *va fi soluţiunea fundamentală asociată.*

Polurile fiind simple, totalitatea funcţiunilor fundamentale coincide cu aceea a soluţiunilor fundamentale. Dacă $\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x)$ sunt n soluţiuni linear independente, corespunzătoare valorii λ_1, de rang n, funcţiunile

$$\psi_p(x) = \int G(xs)\varphi_p(s)ds \qquad (p = 1,2,\ldots n)$$

vor fi *n* soluţiuni *linear independente* ale ecuaţiei asociate, de oarece G(xy) e prin ipoteză definit. Să căutăm acum a le biorto-

www.digibuc.ro

gonaliza, după metoda întrebuințată de mai multe ori până acum. Vom puteà luà :

$$\Phi_1(x) = \varphi_1(x) \text{ şi } \Psi_1(x) = \int G(xs)\varphi_1(s)ds$$

de oarece

$$\int G(xs)\varphi_1(x)\varphi_1(s)ds \neq o.$$

Să observăm acum că dacă

$$\int \Psi_1(x)[\varphi_p(x) - a_p\Phi_1(x)]\,dx = o$$

vom aveà şi

$$\int G(xs)\Phi_1(s)[\varphi_p(x) - a_p\Phi_1(x)]\,dsdx =$$

$$= \int \Phi_1(s)[\psi_p(s) - a_p\Psi_1(s)]\,ds = o$$

ceea ce ne arată că funcțiunile rămase după prima operație, sunt de aceeaş formă cu funcțiunile inițiale; vom puteà, deci, repetà acest procedeu de n ori.

e) *Orice sâmbure simetrizabil, având un număr finit de valori caracteristice, e neapărat de forma*

$$\frac{\varphi_1(x)\psi_1(y)}{\lambda_1} + \qquad + \frac{\varphi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}.$$

Intr'adevăr, dacă extragem din sâmbure părțile caracteristice ale polilor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, cari formează tocmai expresiunea precedentă, rămâne un sâmbure tot simetrizabil (d), care prin ipoteză numai are nici o valoare caracteristică. Deci el e identic nul (c).

16. **Inegalitatea lui Bessel.** *Fiind dată o funcțiune* f(x), *pentru care integrala*

$$\int G(xs)f(s)f(x)dsdx \qquad (G)$$

există, avem

$$a_1^2 + a_2^2 + \qquad + a_n^2 \leq \int G(xs)f(x)f(s)dsdx$$

a_p *fiind coeficientul lui Fourier* $a_p = \int f(s)\psi_p(s)ds$.

www.digibuc.ro

Ca şi în cazurile precedente, această inegalitate rezultă din egalitatea

$$\int G(xs)[f(x)-a_1\varphi_1(x)-\ldots-a_n\varphi_n(x)][f(s)-a_1\varphi_1(s)-\ldots-a_n\varphi_n(s)]\,dsdx=$$
$$=\int G(xs)f(s)f(x)dsdx-a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2$$

observând că primul membru este positiv. Rezultă de acì că *seria*

$$a_1^2+a_1^2+\ldots+a_n^2+\ldots$$

este convergentă.

17. **Teoremă asupra desvoltării unei funcţiuni în serii de funcţiuni biortogonale.**

Orice funcţiune continuă de forma

(a) $\int N(xs)h(s)ds$ sau (b) $\int N(sx)h(s)ds$

este desfăşurabilă într'o serie regulat convergentă după funcţiunile $\varphi_n(x)$ *în cazul* a, *sau după funcţiunile* $\psi_n(x)$ *în cazul* b.

In acest enunţ, N(xy) reprezintă un sâmbure simetrizabil de ambele părţi; N(xy) şi h(x) sunt funcţiuni pentru care integrala G există.

Demonstraţia e analoagă cu acea dată în cazul simetric. Mai întâi seria va fi în cazul *a*:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)$$

în care

$$h_n=\int f(s)\psi_n(s)ds$$

Această serie e regulat convergentă; într'adevăr, raţionamentul întrebuinţat în cazul simetric este aplicabil şi acì, fiindcă şi în acest caz seria $\sum h_n^2$ este convergentă.

Seria S(x) reprezintă pe f(x). Intr'adevăr, să considerăm diferenţa

$$R(x)=f(x)-S(x).$$

Avem

$$\int G(xs)R(x)R(s)ds=\int G(xs)R(s)f(x)ds\,dx-\int G(xs)R(s)S(x)ds\,dx$$

www.digibuc.ro

însă

$$S_1(x) = \int S(s)G(xs)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \psi_n(x).$$

şi, prin urmare,

$$\int G(xs)R(s)S(x)dsdx = \int R(s)S_1(s)ds = o$$

în virtutea definiţiunii lui R(x).

Pe de altă parte

$$\int G(xs)R(s)f(x)dsdx = \int G(xs)R(s)N(xt)h(t)dsdxdt =$$

$$= \int H(st)R(s)h(t)dsdt = o$$

de oarece

$$\int H(xs)R(s)ds = o.$$

Rezultă deci:

$$\int G(xs)R(x)R(s)dsdx = o$$

de unde

$$R(x) = o.$$

18. **Sâmbure simetrizabil închis.** *Vom spune că un sâmbure simetrizabil e închis, dacă* H(xy) *e un sâmbure închis.*

Un sâmbure simetrizabil închis, are *o infinitate de valori caracteristice.* Intr'adevăr, relaţia

$$\int H(xs)h(s)ds = o$$

şi relaţiile $\int \psi_n(s)h(s)ds = o$ sunt reciproce. Prin urmare, dacă H(xy) e închis, nu există nici o funcţiune h(x) care verifică relaţiile precedente, ceeace ne arată că funcţiunile $\psi_n(x)$ sunt în număr infinit.

II. SÂMBURI DIVERŞI

19. **Sâmburii continui** L(α). Printre sâmburii continui vom semnalà clasa importantă de sâmburi L(α) cari verifică în raport cu una din variabile condiţia lui Lipschitz, sub forma sa cea mai generală

$$| N(xy) - N(xz) | < A | y-z |^{\alpha}.$$

www.digibuc.ro

Acești sâmburi se bucură de proprietatea următoare:

Funcțiunea $D(\lambda)$ *a unui sâmbure* $L(\alpha)$ *este de gen zero; ordinul său este cel mult egal cu* $\frac{2}{2\alpha+1}$.

Pentru a demonstrà această teoremă vom stabilì întâi inegalitatea

$$\left| N\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_p \\ x_1 x_2 \dots x_p \end{pmatrix} \right| < M^p \frac{p^{\frac{p}{2}}}{p^{\alpha(p-1)}}$$

în care M reprezintă un număr finit, independent de p.

Avem:

$$(5)\quad N\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_p \\ x_1 x_2 \dots x_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} N(x_1x_1)-N(x_1x_2) & N(x_1x_2)-N(x_1x_3) & \dots & N(x_1x_{p-1})-N(x_1x_p) & N(x_1x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N(x_px_1)-Nx_px_2) & N(x_px_2)-N(x_px_3) & \dots & N(x_px_{p-1})-N(x_px_p) & N(x_px_p) \end{vmatrix}$$

formulă care rezultă din expresiunea bine cunoscută a lui $N\begin{pmatrix} x_1x_2\dots x_p \\ x_1x_2\dots x_p \end{pmatrix}$, scăzând din termenii fiecărei coloane pe aceia ai coloanei următoare

Dacă punem:

$$N(x_ky) = N(x_kz) + (y-z)^\alpha N_k(yz) \qquad (\,|\,N_k(yz)\,|\,< A)$$

vom aveà:

$$N\begin{pmatrix} x_1x_2\dots x_p \\ x_1x_2\dots x_p \end{pmatrix} = (x_1-x_2)^\alpha (x_2-x_3)^\alpha \dots (x_{p-1}-x_p)^\alpha \begin{vmatrix} N_1(x_1x_2) & \dots & N_2(x_{p-1}x_p) & N(x_1x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_p(x_1x_2) & \dots & N_p(x_{p-1}x_p) & N(x_px_p) \end{vmatrix}$$

Insă termenii ultimului determinant sunt toți finiți și mai mici ca A; modulul său maximum va fi deci, în virtutea teoremei lui Hadamard:

$$p^{\frac{p}{2}} A^p.$$

Să considerăm produsul:

$$(x_1-x_2)\ (x_2-x_3)\dots(x_{p-1}-x_p)$$

în domeniul

$$(6)\qquad 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_p \geq 0.$$

www.digibuc.ro

Suma factorilor săi este egală cu $x_1 - x_p$; prin urmare, dacă dăm lui x_1 şi lui x_p valori constante, iar celorlalte variabile valori arbitrare cuprinse în domeniul (6), vom obţine maximul produsului, când toţi factorii vor fi egali. Maximul absolut va avea, deci, loc când $x_1 - x_p$ va fi maximum, adică când $x_1 = 1$ şi $x_p = 0$. In acest caz, fiecare factor este egal cu $\frac{1}{p-1}$ şi valoarea maximum a produsului va fi $\frac{1}{(p-1)^{p-1}}$.

Pe de altă parte, determinantul (5) e o funcţiune simetrică de $x_1 x_2 \ldots x_p$; orice valoare a acestui determinant va fi deci cuprinsă printre acelea luate în domeniul (6), pentru că vom puteà totdeauna operà o schimbare de variabile, aşà ca acestea să fie aranjate după ordinea lor de mărime. Vom aveà, deci:

$$N\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_p \\ x_1 x_2 \ldots x_p \end{pmatrix} \Big| < \frac{p^{\frac{p}{2}} A^p}{(p-1)^{\alpha(p-1)}}$$

şi de oarece

$$\lim_{p=\infty} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{(p-1)\alpha} = e^{\alpha}$$

vom puteà luà ca limită superioară: $\frac{p^{\frac{p}{2}}}{p^{\alpha(p-1)}} M^p$.

Să considerăm acum u_p, coeficientul lui λ^p în $D(\lambda)$; vom aveà

$$\sqrt[p]{|u_p|} < \frac{p^{\frac{1}{2}}}{p^{\alpha\left(\frac{p-1}{p}\right)}} \frac{1}{\sqrt[p]{p!}}$$

sau întrebuinţând formula de aproximaţie a lui Stirling

$$p! \backsim \left(\frac{p}{e}\right)^p$$

$$\sqrt[p]{|u_p|} < \frac{Me}{p^{\alpha\left(\frac{p-1}{p}\right)+\frac{1}{2}}}$$

www.digibuc.ro

şi prin urmare, pentru p suficient de mare,

$$p^{\alpha+\frac{1}{2}}\sqrt[p]{|u_p|}<M'$$

ceeace ne arată că într'adevăr ordinul funcţiunii $D(\lambda)$ este cel mult egal cu $\frac{2}{2\alpha+1}$; genul este, prin urmare, nul.

Observaţii; 1^0 In virtutea proprietăţilor cunoscute ale funcţiunilor întregi, *exponentul de convergenţă* al seriei $1:\lambda_n$ va fi şi el cel mult egal cu $\frac{2}{2\alpha+1}$; vom puteà, deci, afirmà că

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{2\alpha+1}{2}-\varepsilon}:\lambda_n=0.$$

ε fiind o cantitate pozitivă arbitrar de mică.

2^0 Dacă *sâmburele este continuu şi verifică condiţiunea lui Lipschitz* ($\alpha=1$), ordinul lui $D(\lambda)$ va fi, egal după ceeace precede, cu $\frac{2}{3}$; vom aveà, deci:

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{3}{2}-\varepsilon}:\lambda_n=0.$$

CAPITOLUL IV

I. — ECUAŢIA LUI FREDHOLM DE PRIMA SPEŢĂ

1. Ecuaţia lui Fredholm de prima speţă prezintă dificultăţi de studiu, esenţial diferite de acelea pe cari le-am întâlnit până acum în teoria ecuaţiei regulate a lui Fredholm.

Pentru a ne pune o problemă de existenţă, adică pentru a aveà cazuri generale în cari soluţia problemei este unică, nu e deajuns a limità domeniul soluţiunilor la acela al funcţiunilor reale şi integrabile; *condiţiuni accesorii sunt indispensabile.* Această limitare a domeniului în care vor trebuì căutate soluţiunile, constitue elementul nou şi cel mai important al problemei.

Studiul direct al seriilor trigonometrice semnalase dejà rolul funcţiunilor reale, de pătrat integrabile şi cercetările moderne par a arătà importanţa acestei clase de funcţiuni al cărei concept pare

www.digibuc.ro

a urmà în importanţă pe acela al clasei de funcţiuni integrabile. Particularitatea cea mai interesantă în toate aceste cercetări este că instrumentul nou necesar şi comod de investigaţie, este integrala în sensul d-lui Lebesgue, iar nu integrala Riemanniană, ceeace ne dă un nou exemplu cu totul remarcabil de o cercetare logică urmată imediat de rezultate imediat utilizabile.

In acest capitol, integralele vor fi, deci, luate în sensul d-lui Lebesgue, vom numì *somabile,* funcţiunile integrabile în acest sens şi vom însemnà prin Ω, ansamblul funcţiunilor reale, de pătrat somabile, în intervalul (ab).

D-l *E. Picard* a stabilit o teoremă importantă asupra ecuaţiei de prima speţă. Pentru a o stabilì avem nevoe mai întâiu de câteva rezultate recente asupra convergenţii funcţiunilor de variabilă reală.

2. **Convergenţă mijlocie ; definiţiuni.**

a. *Un şir de funcţiuni* Ω

$$(1) \qquad f_1(x)\ f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots$$

convergează în mijlociu în intervalul (ab) *dacă avem*

$$\lim_{m,n=\infty} \int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 dx = 0.$$

b. *Şirul* (1) *converge ză în mijlociu către o funcţiune limită* f(x), *dacă*

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b [f(x) - f_m(x)]^2 dx = 0.$$

Două funcţiuni limite f(x) şi φ(x), egale în tot intervalul (ab), *afară poate de un ansamblu de măsură nulă*, sunt considerate ca egale. Avem în mod evident

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = 0.$$

şi reciproc.

c. *Un şir,* (1) *convergează aproape uniform în intervalul* ab [1]), dacă există intervale, interioare lui ab, de măsură a — b — ε (ε arbitrar de mic), în care şirul convergează uniform.

[1]) Wesentlich gleichmässig (H. Weyl), on unitormément en général (Plancherel-Lauricella).

www.digibuc.ro

3. **Lemă** [1]). *Un şir de funcţiuni* Ω, *convergent în mijlocie, admite o funcţiune limită şi una singură.*

Vom arătà mai întâi că putem extrage din (1), un şir aproape uniform convergent în intervalul ab. Să considerăm pentru aceasta, ansamblul funcţiunilor (1) care verifică inegalitatea.

$$I_{mn} = \int [f_m(x) - f_n(x)]^2 dx < \rho$$

Pentru aceste funcţiuni, ansamblul punctelor x în care:

$$| f_m(x) - f_n(x) | > \eta$$

va aveà o măsură $\mu < \frac{\rho}{\eta^2}$; într'adevăr, avem:

$$\mu\eta^2 < I_{mn} < \rho$$

Dacă, prin urmare, voim ca $\mu < \eta$, va fi suficient să luăm $\rho = \eta^3$; de aci rezultă că:

Fiind dat un număr η *arbitrar, se poate găsì o infinitate de funcţiuni* (1), *astfel ca măsura ansamblului în care diferenţa lor este mai mare ca* η, *să fie inferioară lui* η.

Să considerăm acum un şir oarecare convergent de numere pozitive descrescătoare: $\sum_{p=1}^{\infty} \eta_p$. Fie $f^*_1(x)$ funcţiunea cu indicele cel mai mic, care verifică condiţiunea precedentă pentru η_1; de asemenea fie $f^*_2(x)$ funcţiunea analoagă pentru η_2, supusă fiind încă la condiţia ca indicele său să fie superior al aceleia pe care am însemnat-o cu $f^*_1(x)$, şi aşà mai departe. Şirul

$$(2) \qquad f^*_1(x),\ f^*_2(x), \ldots, f^*_n(x) \ldots$$

răspunde chestiunii. Va fi de ajuns să arătăm că, fiind dat un ε arbitrar de mic, există un interval de măsură $b - a - \varepsilon$ în care vom aveà, începând de la o anumită valoare a lui n:

$$| f^*_p(x) - f^*_q(x) | < \eta \qquad (p,q \geq n)$$

ori cât de mic ar fi η. Să determinăm pentru aceasta n, aşa fel

[1]) Se poate consultà asupra acestei chestiuni: *H. Weyl.* Convergenz von Reihen die nach Orthogonal funktionen fortschreiten. (Math. Ann. Bd. 67. 1909). M. Plancherel (Rendiconti Palermo, 1910, pag. 292). F. Riesz (CR. tome 150, 1910, pag. 1.304). A se vedeà şi nota d-lui A. Egoroff (CR. t. 152, Ianuarie 1911).

www.digibuc.ro

încât să avem în acelaş timp $\eta_n < \eta$ şi $r_n = \sum_{p=n}^{\infty} \eta_p < \varepsilon$, ceeace este evident totdeauna posibil, de oarece η_n şi r_n tind către zero odată $\frac{1}{n}$. In aceste condiţiuni, să excludem din intervalul (ab), toate ansamblele în cari diferenţele funcţiunilor (2) sunt respectiv mai mari ca η_n, $\eta_{n+1}, \ldots$; măsura sumei acestor ansamble scoase este mai mică sau cel mult egală cu

$$\eta_n + \eta_{n+1} + \ldots < \varepsilon$$

Intervalul care rămâne, a cărui măsură I_ε este mai mare ca $b - a - \varepsilon$, este intervalul căutat. Intr'adevăr nu putem avea în acest interval:

$$| f^*_{m+k}(x) - f^*_m(x) | > \eta \qquad (m \geq n)$$

căci $\eta > \eta_m$; or noi am exclus intervalele în cari diferenţa funcţiunilor şirului (2) este mai mare η_m. Proprietatea este astfel stabilită.

Şirul (2) tinde, deci, uniform în I_ε către o funcţiune f(x). Această funcţiune, definită astfel în tot intervalul, afară poate de un ansamblu având o măsură nulă, este *o funcţiune limită a şirului* (1).

Mai întâi, ea aparţine ansamblului Ω, căci vom avea: [1])

$$\int_{I(\varepsilon)} f^*_n(x)^2 dx < 2\int_{I(\varepsilon)} [f^*_n(x) - f^*_m(x)]^2 dx + 2\int_{I(\varepsilon)} f_m^2(x) dx < 2\eta + 2M$$

Deci, $\lim_{n=\infty} \int_{I(\varepsilon)} f^*_n(x)^2 dx$ există; acestă limită va fi de altfel egală cu $\int_{I\varepsilon)} f^2(s) ds$, de oarece funcţiunile $f^*_n(x)$ tind uniform către f(x) în intervalul I_ε şi vom avea

$$\int_{I(\varepsilon)} f^2(s) ds < 2\eta + 2M$$

oricari ar fi ε. Deci, $\lim_{\varepsilon=0} \int_{I(\varepsilon)} f^2(s) ds$ există şi ea va fi în virtutea definiţiunii lui f(x), tocmai

$$\int_a^b f^2(s) ds$$

Funcţiunea f(x) *aparţine, deci, lui* $\mathfrak{L}$. Avem apoi

www.digibuc.ro

$$\int_a^b [f(s) - f_p(s)]^2 ds < 2\int_b^a [f(s) - f^*_m(s)]^2 ds + 2\int_a^b [f^*_m(s) - f_p(s)]^2 ds$$
$$< 2[\eta^2 I_e + A\varepsilon] + 2\varepsilon,$$

ceeace ne arată că f(x) este o funcţiune limită pentru şirul (1).

In sfârşit, această funcţiune limită este singura; să presupunem într'adevăr că am aveà

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b [f(s) - f_n(s)]^2 ds = \lim_{m=\infty} \int_a^b [\varphi(s) - f^m(s)]^2 ds = o.$$

Vom aveà, pentru o infinitate de valori p,

$$\int_a^b [f(s) - \varphi(s)]^2 ds \leq 2\int_a^b [f(s) - f_p(s)]^2 ds + 2\int_a^b [\varphi(s) - f_p(s)]^2 ds < \varepsilon',$$

ceeace ne arată că vom aveà riguros:

$$\int_a^b [f(s) - \varphi(s)]^2 ds = o_1,$$

adică funcţiunile f(x) şi φ(x) nu pot fi diferite decât într'un ansamblu de măsură nulă.

4. **Teorema lui Fischer-Riesz.** Fie:

(3) $$\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x).$$

un şir complect de funcţiuni ortogonale şi

$$f_1 \quad f_2 \ldots \quad f_n \ldots$$

un şir de constante astfel încât seria:

(4) $$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 + \ldots$$

să fie convergentă.

Există o funcţiune f(x). *aparţinând lui* $\mathfrak{L}^2$, *şi numai una singură, care admite ca coeficienţi ai lui Fourier în raport cu şirul* (3), *constantele* f_n.

Condiţiunea (4) *este necesară şi suficientă.*

Această teoremă importantă a fost demonstrată pentru întâia oară de către d-nii E. Fischer şi F. Riesz. Ea are avantajul că conţine actualmente, sub o formă imediat utilizabilă în analiză, o parte esenţială din cercetările moderne asupra ecuaţiilor lineare cu o infinitate de variabile.

Condiţiunea (4) este evident necesară, de oarece se cere ca func-

www.digibuc.ro

ţiunea f(x) să aibă pătratul său, somabil. Să demonstrăm că această condiţiune este şi suficientă. Să considerăm pentru aceasta şirul:

$$f_n(x) = f_1\varphi_1(x) + f_2\varphi_2(x) + \ldots + f_n\varphi_n(x) \quad (n = 1,2 \ldots \infty),$$

Avem:

$$\int_a^b [f_m(s) - f_n(s)]^2 \, ds = f_n^2 + f_{n+1}^2 + \ldots + f_m^2,$$

şi prin urmare:

$$\lim_{m,n=\infty} \int_a^b [f_n(s) - f_m(s)]^2 \, ds = 0.$$

Şirul $f_n(x)$ *convergează deci în mijlocie*, în intervalul ab; el defineşte astfel o funcţiune f(x) perfect determinată, afară poate de un ansamblu de măsură nulă. Funcţiunea astfel definită este funcţiunea căutată. Va trebui pentru aceasta să arătăm că:

$$f_p = \int f(s)\varphi_p(s)ds,$$

Insă avem:

$$\left[\int_a^b [f(s) - f_n(s)]\,\varphi_p(s)\,ds\right]^2 \leq \int_a^b [f(s) - f_n(s)]^2 ds \int_a^b \varphi_n^2(s)ds < \varepsilon$$

şi prin urmare:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(s)\varphi_p(s)ds = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)ds$$

Insă:

$$\int f_n(s)\varphi_p(s)ds = f_p \quad n > p.$$

Egalitatea (4′) este astfel stabilită.

Am găsit deci o funcţiune care admite constantele f_n, drept constante Fourier, în raport cu şirul (3). Ea este şi singura funcţiune care se bucură de această proprietate, fiindcă dacă ar mai fi încă una $\psi(x)$, diferenţa $f(x) - \psi(x)$ ar fi ortogonală tuturor funcţiunilor $\varphi_n(x)$, ceeace este imposibil, de oarece şirul (3) este complect.

5. **Teorema d-lui Schmidt asupra sâmburilor nesimetrici.**

D-l E. Schmidt a publicat, în Dissertaţia Inaugurală, o extensiune a teoremei sale, pentru cazul sâmburelui nesimetric.

Fie N(xy) un sâmbure nesimetric aparţinând lui $\mathfrak{L}^2$ şi să însemnăm:

$$\overline{N}(xy) = \int N(sx)N(sy)\,ds$$

$$\underline{N}(xy) = \int N(xs)N(ys)ds.$$

www.digibuc.ro

Aceşti doi sâmburi sunt evident simetrici; *ei sunt şi pozitivi.*

Intr'adevăr, avem:

$$\int \overline{N}(xy)h(x)h(y)dxdy = \left[\int N(sx)h(x)dx\right]^2$$

şi acelaş lucru pentru $\underline{N}(xy)$.

Valorile caracteristice ale sâmburilor $\overline{N}(xy)$ şi $\underline{N}(xy)$ sunt *deci pozitive. Ele sunt aceleaşi;* într'adevăr, fie λ_n^2 o valoare caracteristică a lui $\overline{N}(xy)$ şi $\varphi_n(x)$ o soluţiune fundamentală relativă.

Avem:

$$\varphi_n(x) - \lambda_n^2 \int \overline{N}(xt)\varphi_n(t)dt = o. \tag{5}$$

Să însemnăm atunci:

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int N(xt)\varphi_n(t)dt \tag{6}$$

vom aveà:

$$\varphi_n(x) - \lambda_n \int N(sx)\psi_n(s)ds = o, \tag{7}$$

ceeace ne arată mai întâiu că $\psi_n(x)$ nu poate fi identic nul. Să înlocuim apoi, în relaţia (6), $\varphi_n(x)$ prin valoarea sa (7); vom aveà

$$\psi_n(x) - \lambda^2_n \int \underline{N}(xs)\psi_n(s)ds = o. \tag{8}$$

Sâmburele $\underline{N}(xy)$ admite deci şi el valoarea caracteristică λ_n^2; pe de altă parte, deducem din (6):

$$\int \psi_n^2(s)ds = \lambda_n \int N\ st)\varphi_n(t)\psi_n(s)ds,$$

şi tot aşa din (7)

$$\int \varphi_n^2(s)ds = \lambda_n \int N(st)\varphi_n(t)\psi_n(s)ds$$

Prin urmare

$$\int \psi_n^2(s)ds = \int \varphi_n^2(s)ds = 1.$$

Deci $\psi_n(x)$ este o funcţiune fundamentală a lui $\underline{N}(xy)$, pentru valoarea caracteristică λ_n^2. Obţinem astfel rezultatul următor:

a) *Sâmburii simetrici* $\overline{N}(xy)$ *şi* $\underline{N}(xy)$ *au aceleaşi valori caracteristice, toate pozitive;* le vom scrie sub forma λ_n^2.

2. *Dacă funcţiunile caracteristice ale sâmburelui* $N(xy)$ *sunt:*

$$\varphi_1(x)\ \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) \ldots$$

acelea ale sâmburelui $\underline{N}(xy)$, *vor fi*

$$\psi_1(x)\ \psi_2(x) \ldots \psi_n(x) \ldots$$

www.digibuc.ro

în care :

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int N(xs)\varphi_n(s)ds.$$

Iată acum teorema d-lui Schmidt :

Orice funcţiune continuă având forma a *sau* b

$$\text{(a)} \int N(xs)h(s)ds \qquad \text{(b)} \int N(sx)h(s)ds$$

se poate desfăşurà într'o serie regulat convergentă de funcţiuni $\psi_n(x)$ *sau* $\varphi_n(x)$, *după cum funcţiunea are forma* a *sau* b.

Vom demonstrà teorema în cazul a; în cazul b, demonstraţia este identică.

Coeficientul lui Fourier al funcţiunii (a), în raport cu $\psi_n(x)$ este

$$\int N(xs)\psi_n(s(h(s)ds = \frac{1}{\lambda_n}\int h(s)\varphi_n(s)ds$$

astfel încât desfăşurarea căutată, ar fi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)}{\lambda_n} \int h(s)\varphi_n(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int N(xs)\varphi_n(s)ds \int h(s)\varphi_n(s)ds$$

Această serie e regulat convergentă, în virtutea raţionamentului aplicat la teorema Hilbert-Schmidt. Insă ea are aceiaşi coeficienţi ei lui Fourier ca şi funcţiunea (a), după chiar definiţiunea funcţiunii $f(x)$; vom aveà deci

$$\int N(xs)h(s)ds \equiv f(x)$$

Această teoremă are importanţa sa proprie, fiindcă ea dă desvoltări în serie după funcţiunile $\varphi_n(x)$ sau $\psi_n(x)$ pentru o clasă de funcţiuni mai întinsă decât aceea dată de teorema Hilbert-Schmidt, aplicată direct sâmburilor $\underline{N}(xy)$ sau $\overline{N}(xy)$.

6. **Teorema d-lui E. Picard** [1]). *Ecuaţia integrală de prima speţă*

$$\int N(xs)h(s)ds = f(x)$$

admite o soluţiune şi una singură în Ω, *dacă seria*

$$\text{(9)} \qquad \lambda_1^2 f_1^2 + \lambda_2^2 f_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 f_n^2 + \ldots$$

este convergentă. Sâmburele $\overline{N}(xy)$ *este presupus închis; condiţiunea* (9) *este necesară şi suficientă.*

[1]) *E. Picard.* Un théorème général sur les équations intégrales de première espèce. (C. R. 14 Juin 1909) et Rendiconti di Palermo (1910, t. 29).

www.digibuc.ro

În acest enunț constantele λ_n^2 reprezintă valorile caracteristice ale lui $\underline{N}(xy)$ și f_n coeficienții lui Fourier ai funcțiunii $f(x)$ în raport cu funcțiunile ortogonale ale lui $\underline{N}(xy)$.

Pentru a demonstrà această teoremă să calculăm coeficientul f_n în raport cu $\psi_n(x)$; avem

$$f_n = \int f(s)\psi_n(s)ds = \int \psi_n(x)N(xs)h(s)dsdx = \frac{1}{\lambda_n}\int h(s)\varphi_n(s)ds,$$

de unde

$$\int h(s)\varphi_n(s)ds = \lambda_n f_n. \tag{10}$$

Insă, în virtutea teoremei lui Fischer-Riesz, condiția necesară și suficientă pentru ca să existe o soluțiune și una singură $h(x)$ care să verifice inegalitățile (16), este ca seria $\sum \lambda_n^2 f_n^2$ să fie convergentă.

Funcțiunea astfel găsită, verifică ecuația integrală. Intr'adevăr, după formațiunea lui $h(x)$, funcțiunile

$$\int N(xs)h(s(ds \text{ și } f(x)$$

au aceiași coeficienți Fourier în raport cu șirul închis $\psi_n(x)$; ele sunt deci identice.

Observație. *Dacă șirul funcțiunilor* $\psi_p(x)$ *nu e închis* raționamentul precedent ne permite numai să scrim

$$\int N(xs)h(s)ds = f(x) + k(x). \tag{11}$$

Orice ecuație de forma

$$\int N(xs)h_1(s)ds = f(x) + k(x) + k_1(x) \tag{12}$$

în care $k_1(x)$ reprezintă o altă funcțiune ortogonală cu $\psi_n(x)$, nu mai e rezolubilă în Ω. Intr'adevăr, deducem din (11) și (12) prin scădere:

$$\int N(xs)[h(s) - h_1(s)]ds = k_1(x),$$

ceeace e imposibil.

Deci, dacă sâmburele $N(xy)$ *nu e închis, printre ecuațiile*

$$\int N(xs)h(s)ds = f(x) + k(x)$$

în care $f(x)$ reprezintă o funcțiune determinată neortogonală ca $\psi_n(x)$, iar $k(x)$ o funcțiune oarecare ortogonală cu funcțiunile $\psi_n(x)$, *există o ecuație și una singură rezolubilă în* Ω.

www.digibuc.ro

PARTEA III

CAP. I

ECUAȚIUNI SINGULARE

1. **Definițiuni; istoric.** Vom spune că o ecuație integrală este singulară, dacă una cel puțin din limitele integralei definite este infinită, sau dacă sâmburele devine infinit pentru un punct, cel puțin, al intervalului de integrare. Vom cuprinde de asemenea în clasa ecuațiunilor singulare, ecuațiunea lui Volterra de prima speță, în cazul când avem $N(x,x) = 0$, pentru un punct, cel puțin, al intervalului de integrare.

Pentru ecuațiunea singulară a lui Voltera avem de citat lucrările d-lor V. Volterra, E. Holmgren, I. Horn [1]) și G. C. Evans [2]).

Ecuațiunea singulară a lui Fredholm a fost de asemenea considerată sub impulsiunea lucrărilor d-lui D. Hilbert, de d-nii H. Weyl, E. Hilb și E. Plancherel.

In aceste studii se întâlnesc circonstanțe analitice remarcabile și diferite.

Iată acelea cari sunt esențiale:

1^0 Valorile caracteristice nu mai formează în general, un ansamblu numerabil de puncte izolate; ele pot fi distribuite, în cazul simetric, de exemplu, pe segmente ale axei reale, pretutindeni dense. Se zice că ele formează, în acest caz, *spectrul segmentar* al sâmburelui.

2^0 In loc de teorema dezvoltării în *serii* Fourier, se introduce o teoremă asupra reprezentării unei funcțiuni arbitrare, cu ajutorul unei *integrale* a lui Fourier.

3^0 Natura analitică în λ, a soluțiunii depinde în mod esențial de membrul al doilea.

4^0 Realitatea soluțiilor impune, în cazul singular, și face să reiasă, condițiuni restrictive din cele mai variate.

---

[1]) I. HORN. Volterrasche Integralgleichungen und Summen Gleichungen. (Journal f. reine u. a. Math. 140. 2. (pag. 20—158 1911).

[2]) G. C. EVANS. L'equazione integrale di Volterra di seconda specie, con un limite dele integrali infinito. (Atti Lincei).

www.digibuc.ro

Metodele actuale se menţin în domeniul real. Este, cu toate acestea, necesar, de îndată ce trecem în cazul singular, de a introduce variabila complexă.

Aceasta s'a făcut deja pentru ecuaţiunea lui Volterra, şi se poate încerca asemenea pentru ecuaţiunea lui Fredholm. In câteva note recente, d-l E. Picard indică o cale fecundă în această nouă direcţie.

Acest capitol este în plină perioadă de formaţiune, dar rezultate, având un caracter mai mare de generalitate, nu s'au obţinnt încă în mod definitiv. Din această cauză, ne vom mărginì, pentru ecuaţiunea lui Fredholm, a dezvoltà câte-va exemple şi teoreme ale d-lui Picard.

Alături de ecuaţiunile singulare propriu zise, avem de semnalat clasa importantă a ecuaţiilor integrale al căror sâmbure este de forma :

$$\frac{N(xy)}{(x-y)^{\alpha}} \quad (0<\alpha<1)$$

Aceste ecuaţiuni, cu ajutorul unui artificiu de calcul, pot fi tratate cu succes prin metodele precedente şi au proprietăţi regulate.

I. ECUAŢIUNEA SINGULARĂ A LUI VOLTERRA. CAZUL $N(0,0)=0$

2. **Teorema d-lor Volterra şi Holmgren**. Acest caz a fost aprofundat de d-nii V. Volterra şi E. Holmgren, în ipoteza unui sâmbure analitic, sau mai general, a unui sâmbure, care poate fi pus sub forma :

$$(1)\quad N(x,y)=A_0x^n+A_1x^{n-1}y+\ldots+A_ny^n+x^{n+1}Q(x,y)$$
$$=P(x,y)+x^{n+1}Q(x,y) \quad (A_0+A_1+\ldots+A_n\neq 0)$$

$Q(x,y)$ reprezintă o funcţiune finită în intervalul de integrare.

Iată enunţul teoremei d-lui Volterra, completată de d-l Holmgren :

Pentru ca ecuaţiunea :

$$(2)\qquad \int_0^x N(xs)\varphi(s)\,ds = f(x)$$

www.digibuc.ro

să aibă soluţiuni reale, finite în jurul originei, trebue şi e de ajuns ca :

$$f(o) = f'(o) = f''(o) = \ldots = f^{(n)}(o) = o$$

In acest caz, ecuaţiunea (2) *are* $k+1$ *soluţiuni lineare independente,* k *fiind numărul rădăcinelor cu parte reală pozitivă sau nulă, a ecuaţiei în* r *:*

$$(2') \qquad \frac{A_o}{r+n} + \frac{A_1}{r+n-1} + \ldots + \frac{A_n}{r+1} = o.$$

Pentru a demonstrà această teoremă, vom întrebuinţà ca şi în cazul regulat, meto la aproximaţiilor succesive, reducând acest caz la rezolvirea unei ecuaţiuni diferenţiale lineare de ordinul n şi la un mecanism de aproximaţiuni succesive.

Vom scri mai întâiu sâmburele sub forma:

$$(1') \quad a_o(x) + a_1(x)\frac{x-y}{1} + \ldots . a_n(x)\frac{(x-y)^n}{n!} + \frac{(x-y)^{n+1}}{n+1!} P(xy)$$

punând în evidenţă necunoscuta x—y, în locul lui y. Pentru că ansamblul terminilor de grad minim, formează un polinom omogen de gradul n, rezultă că $a_o(x)$ conţine necesar x^n în factor, şi în general, $a_p(x)$ conţine cel puţin x^{n-p} în factor

Avem apoi:

$$a_o(o) - A_o + A_1 + \ldots + A_n \neq o$$

cum se vede, făcând $x=y$, în cele două expresiuni (1) şi (1') a lui $N(x,y)$.

In aceste condiţiuni, ecuaţia lui Volterra se poate scrie:

$$\int_o^x \left[a_o(x) + a_1(x)\frac{x-s}{1} + \ldots + a_n(x)\frac{(x-s)^n}{n!} \right] \varphi(s)ds$$

$$+ \int_o^x \frac{(x-s)^{n+1}}{n+1!} P(x,s)\varphi(s)ds = f(x).$$

E de ajuns acum de a aplicà formula bine cunoscută:

$$\int_o^x \frac{x-s)^p}{p!} \varphi(s)ds - \int \varphi(s)ds^{p+1}$$

şi de a luà ca necunoscută, în locul lui $\varphi(x)$, funcţiunea :

$$z(x) \quad \int_o^x \varphi(s)ds^{n+1}$$

www.digibuc.ro

pentru a obține ecuațiunea:

$$(3)\quad a_0(x)\frac{d^n z}{dx_n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n(x)z+\int_o^x P_1(xs)z(s)ds=f(x).$$

Dacă soluțiunea $\varphi(x)$ este finită și continuă în origină, ansamblul terminilor de grad minimum în primul membru din (3) va fi de gradul $n+1$ în x; rezultă deci că e necesar ca să avem:

$$f(x)=x^{n+1}f_1(x).$$

In aceste condițiuni, aplicăm metoda aproximațiilor succesive, luând ca primă ecuațiune de aproximație:

$$(4)\quad D_1(z)-a_0(x)\frac{d^n z_1}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}}+\ldots+a^n(x)z_1-f(x).$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul n, de tipul lui Fuchs, a cărei soluție generală va fi dată prin expresiunea:

$$(5)\quad C_1x^{r_1}P_1(x)+C_2x^{r_2}P_2(x)+\ldots+C^nx^{r_n}P_n(x)+Q_1(x)\quad(P_k(o)\neq o)$$

în care $r_1, r_2, \ldots r^n$ sunt rădăcinile, presupuse întâiu distincte și cu diferențe neîntregi, ale ecuației determinante. $Q_1(x)$ înseamnă o soluție particulară a ecuației (4), cu al doilea membru; ea poate totdeauna să se pună sub forma [1]):

$$(5')\quad Q(x)=x^{r_1}P_1(x)\int_{a_1}^{x}\frac{Q_1(x)f(x)dx}{x^{r_2+1}}+x^{r_2}P_2(x)\int_{a_2}^{x}\frac{Q_2(x)f(x)dx}{x^{r_2+1}}+\ldots$$

$$x^{r_n}P_n(x)\int_{a_n}^{x}\frac{Q_n(x)f(x)dx}{x^{r_n+1}}\quad(Q_k(o)\neq o).$$

Un mic raționament ne arată imediat că această soluțiune este totdeauna finită și *de forma* $x^{n+1}q(x)$, *dacă integralele cari figurează în expresia sa, au un sens.* In adevăr, ordinul infinitesimal în x a expresiunii de sub semnul $\int$ care figurează în termenul general este cel puțin [2])$R(n+1-r_i-1)=R(n-r_i)$. Dacă deci $R(n-r_i)>-1$, pentru ca integrala corespunzătoare să aibă un sens, va trebuì să luăm $a_i=o$; în acest caz, ordinul infinitesimal al integralei va fi cel puțin egal cu $R(n-r_i+1)$, și prin urmare termenul în întregime va aveà un ordin cel puțin egal cu $n+1$.

[1]) Se obține această formulă întrebuințând, de exemplu, metoda variației constantelor.

[2]) $R(x)$ înseamnă partea reală a lui x.

www.digibuc.ro

Dacă $R(n-r_i) \leq -1$ trebuie a luà ca limită inferioară o valoare pentru a_i arbitrară pozitivă, dar diferită de zero. Ordinul infinitesimal va fi atunci egal cel puțin cu r_i; dar cum în acest caz avem $Rr_i \geq n+1$, ordinul infinitesimal al termenului respectiv va fi deci totdeauna cel puțin egal cu $n+1$. In toate cazurile expresiunea (5') ne dă deci o soluție a ecuației (4), finită și de ordin infinitesimal cel puțin egal cu $n+1$. Dacă se lasă constantele $a_i \neq 0$, arbitrare, expresiunea (5') reprezintă soluțiunea cea mai generală a ecuației (4), care e finită și de ordin infinitesimal în x, cel puțin egal cu $n+1$. Ea conține constantele arbitrare, în număr egal cu rădăcinile ecuațiunii algebrice (2'), astfel ca $Rr_i \geq n+1$.

Este acum foarte ușor a demonstrà convergența regulată a aproximațiilor succesive. In adevăr, în intervalul de integrare avem:

$$| f(x) | < Mx^{n+1}, \quad | P_i(x) | < P_i, \quad | Q_i(x) | < Q_i.$$

Dacă deci punem $\sum_1^n P_iQ_i = N$ și dacă ρ înseamnă cea mai mică din expresiunile $| n-r_i+1 |$, vom aveà:

$$x^{r_i}P_i(x)\int_{a_i}^{x}\frac{Q(x)f(x)dx}{x^{r_i+1}} < P_iQ_iM\frac{x^{n+1}}{|n-r_i+1|}$$

și, prin urmare,

$$| z_1(x) | < \frac{N.M}{\rho}x^{n+1}.$$

A doua aproximație este dată prin

$$D(z_2) = -\int_0^x P_1(x,s)z_1(s)ds. \tag{6}$$

Se va luà pentru z_2 aceeaș expresiune (5'), unde avem de înlocuit f(x) prin al doilea membru din (6).

In virtutea inegalității

$$\left| \int_0^x P_1(xs)z_1(s)ds \right| < \Pi\frac{MNx^{n+2}}{\rho(n+2)} \quad (P_1(xy) < \Pi)$$

vom puteà scrì imediat:

$$| z_2 | < \Pi\frac{M^2N^2}{\rho(\rho+1)} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

www.digibuc.ro

Vom avea de asemenea:

$$|z_3| < \Pi^2 \frac{M^3N^3}{\rho(\rho+1)(\rho+2)} \cdot \frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)}$$

. . . . . .

$$|z_q| < \Pi \frac{q-1 M_q N_q}{\rho(\rho+1)\dots(\rho+q-1)} \cdot \frac{x^{n+q}}{(n+2)\dots(n+q)}.$$

Aceste inegalităţi demonstră convergenţa regulată a seriilor aproximaţiilor.

Soluţiunea astfel obţinută conţine liniar k constante arbitrare a_i, k însemnând numărul rădăcinilor r_i, a căror parte reală este mai mare sau egală cu $n+1$, adică astfel ca $n-r_i \leq -1$.

3. **Ecuaţiunea determinantă.**

Ne rămâne acum a arătà că ecuaţia determinantă a lui (4) coincide necesar eu ecuaţiunea algebrică (2′). Observăm pentru aceasta că ecuaţia determinantă a lui (4) nu se schimbă, dacă se păstrează din coeficienţii $a_i(x)$ numai primii lor termeni. Dar, în acest caz, ecuaţia (4) în $\rho(x)$ se reduce evident la:

$$\int_0^x \left[A_0x^n + A_1x^{n-1}s + \dots + A_ns^n\right]\varphi(s)ds - f(x)$$

a cărei ecuaţie determinantă se obţine imediat, făcând $\varphi(x) = x^r$, ceea ce ne dă:

$$\left[\frac{A_0}{r+1} + \dots + \frac{An}{r+n+1}\right]x^{n+r+1} = 0.$$

Acum relaţiunea

$$z(x) - \int_0^x \varphi(s)ds^{n+1}$$

ne arată că dacă $\varphi(x) - x^r$, vom aveà $z(x) = \alpha x^{n+r+1}$; pentru a obţine deci ecuaţiunea determinantă a lui (4), n'avem decât să înlocuim r în ecuaţia

$$\frac{A_0}{r+1} + \dots + \frac{A_n}{r+n+1} = 0$$

prin $r-n-1$. Se va puteà atunci păstrà ecuaţiunea (2′) cu condiţie de a înlocuì condiţia: $R(r_i) \geq n+1$, prin condiţia $R(r_i) \geq 0$. Regăsim astfel condiţia care figurează în enunţul teoremei d-lor Volterra şi Holmgren.

www.digibuc.ro

Observări. 1⁰ Cazul rădăcinilor r_i egale, sau cu diferințe întregi, poate să fie tratat într'un mod absolut analog ; introducerea logaritmilor nu schimbă nimic în raționamentul precedent.

2⁰ Problema precedentă revine la căutarea soluțiunilor finite în origine, pe axa reală, a ecuațiunii lineare de ordin infinit

$$a_0(x)y+a_1(x)\int ydx+\ldots.+a_n(x)\int ydx^n+\ldots=f(x).$$

Dacă gradul în s al sâmburelui este finit, această ecuație va fi de ordin finit și cădem astfel peste o chestiune cunoscută, față de care teorema d-lor Volterra și Holmgren este o adevărată generalizare.

II. SÂMBURII ABELIANI

4. **Cazul general.** Vom numi *sâmbure abelian* un sâmbure de forma

$$\frac{G(xy)}{(x-y)^\alpha} \mid 0<\alpha<1$$

Dacă $G(x,x)\neq 0$, vom spune că sâmburele este *de exponent* α. Acești sâmburi se întâlnesc adesea în aplicațiuni; în afară de aceasta, ei prezintă și un interes istoric, pentrucă sâmburele întâlnit în faimoasa problemă a lui Abel este tocmai de această formă.

Să luăm ecuațiunea de prima speță.

$$(7)\qquad \int_0^x \frac{G(x,s)}{(x-s)^\alpha}\varphi(s)ds=f(x).$$

Pentru a o rezolvi, vom compune cei doi membrii a acestei ecuațiuni cu $\frac{1}{(x-y)^{1-\alpha}}$; obținem

$$\int_0^x \frac{dz}{(x-z)^{1-\alpha}}\int_0^z \frac{G(zs)\varphi(s)ds}{(z-s)^\alpha} \qquad \int_0^x \frac{f(z)dz}{(x-z)^{1-\alpha}},$$

sau aplicând formula lui Dirichlet

$$\int_0^x \varphi(s)ds\int_s^x \frac{G(z,s)dz}{(x-z)^{1-\alpha}(z-s)^\alpha}-\int_0^x \frac{f(z)dz}{(x-z)^{1-\alpha}}.$$

www.digibuc.ro

Să însemnăm

$$(7_a) \qquad \int_y^x \frac{G(sy)ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-y)^{\alpha}} - K(xy)$$

şi

$$\int_0^x \frac{f(z)dz}{(x-z)^{1-\alpha}} = F(x)$$

obţinem astfel ecuaţiunea:

$$(8) \qquad \int_0^x K(xs)\varphi(s)ds = F(x).$$

Aceasta este o ecuaţie a lui Volterra, al cărei sâmbure nu mai devine infinit pentru $x=y$. In adevăr, facem în (7_a) schimbarea de variabilă,

$$s - y = t(x - y)$$

obţinem imediat:

$$K(xy) = \int_0^1 \frac{G[y+t(x-y),y]}{(1-t)^{1-\alpha}t^{\alpha}}\,dt,$$

ceea ce ne arată că sâmburele $K(\lambda y)$ este finit pentru $x=y$.

Artificiul de calcul întrebuinţat ne obligă a arătà acum că, *reciproc*, ori-ce soluţie a ecuaţiei (8) verifică şi pe (7). Aceasta revine la a arătà că ecuaţia

$$\int_0^x \frac{h(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}} = 0$$

nu admite altă soluţiune de cât $h(x)\equiv 0$.

Pentru a stabilì acest rezultat să compunem ecuaţia precedentă cu $\frac{1}{(x-y)^{\alpha}}$ şi să aplicăm formula lui Dirichlet. Obţinem astfel imediat:

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi}\int_0^x h(s)ds = 0,$$

de unde rezultă $h(x)\equiv 0$.

5. **Problema lui Abel.** Abel a considerat ecuaţiunea.

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^{\alpha}} = f(x) \quad (0<\alpha<1).$$

Acesta este cazul particular în care $G(xy)\equiv 1$.

www.digibuc.ro

In acest caz, formulele precedente devin foarte simple. Avem:

$$K(xy) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}.$$

Prin urmare, pentru că $K'_x(xy) \equiv o$, soluţiunea problemei lui Abel va fi dată de formula[1]).

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(o)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\right]$$

III. CAZUL $a = \infty$

6. Ecuaţiunea lui Volterra

$$\varphi(x) + \int_x^{+\infty} N(xs)\varphi(s)ds = f(x) \qquad x \geq a) \tag{9'}$$

se prezintă în cercetările moderne asupra fenomenelor neanalitice[2]).

Pentru a tratà împreună cu d-nul G. C. Evans[3]), un caz simplu, vom face ipoteza că integrala

$$\int_x^{\infty} | N(xs) | ds \tag{9}$$

există şi că chiar, *pentru x suficient de mare*, ea poate fi făcută ori cât de mică voim.

In acest caz, aplicând aproximaţiunile succesive, se demonstră, ca şi în cazul ecuaţiunii regulate a lui Fredholm, că seria aproximaţiilor converge, şi că ea reprezintă singură soluţiunea finită a ecuaţiei (9'), dacă se ia x suficient de mare, de exemplu mai mare de cât $b > a$.

Pentru a obţine acum o soluţie a ecuaţiei (9') în tot intervalul $(a \to +\infty)$ putem procedà *prin prelungire*. Scrim ecuaţia (9') sub forma

$$\varphi(x) + \int_x^b N(xs)\varphi(s)ds = f(x) - \int_b^{\infty} N(xs)\varphi(s)ds. \tag{10}$$

[1]) A se vedeà şi E. Goursat : *Sur un problème d'inversion d'Abel.* (Acta Mat. 27. 1903).

[2]) A se vedeà E. Picard : *La science moderne et son état actuel.* (pag. 55).

[3]) A se vedeà : Atti Lincei (Martie şi Mai 1911).

www.digibuc.ro

Membrul al 2-lea al acestei ecuaţiuni este cunoscut, pentru că $\varphi(x)$ este acum cunoscut în intervalul $(b, +\infty)$. Ecuaţia (10) este deci, o ecuaţie a lui Volterra regulată, de a doua specie, care ne va da astfel, valorile lui $\varphi(x)$ în intervalul (a b). In ipoteza mai generală, numai a *existenţei*, integralei (9), se poate introduce înaintea integralei un parametru λ; în acest caz, aproximaţiile succesive converg, numai *dacă* λ *este suficient de mic.* Punctul $\lambda = 0$ este, deci, un punct regulat al soluţiunii, considerată, ca funcţiune de λ.

Ar fi interesant un studiu complet al naturei analitice în λ, a soluţiunii, fiindcă ecuaţia lui Volterra cu o limită infinită, apare ca unul din exemplele cele mai generale şi cele mai simple de ecuaţiuni singulare.

IV. ECUAŢIA SINGULARĂ A LUI FREDHOLM: SÂMBURII ABELIANI

7. **Compunerea a doi sâmburi abeliani.** — *Sâmburele compus a doi sâmburi abeliani respectiv de exponenţi* α *şi* β, *este un sâmbure de aceeaş formă şi de exponent* $\alpha+\beta-1$.

Compunerea este făcută în intervalul a, b. Vom considera cazul $\alpha+\beta-1>0$; este evident că în cazul $\alpha+\beta-1<0$, sâmburele compus nu mai este singular.

Fie

$$P(xy)=\frac{G_1(xy)}{(x-y)^\alpha},\quad Q(xy)=\frac{G_2(xy)}{(x-y)^\beta}$$

şi considerăm sâmburele

$$(11)\qquad \int_a^b P(xs)Q(sy)ds=\int_a^b \frac{G_1(xs)G_2(sy)}{(x-s)^\alpha(s\ \ y)^\beta}ds.$$

Presupunem de exemplu $y<x$. Să dividem intervalul a. b în trei intervale parţiale: a. y, y x şi x. b; fie I_1, I_2 şi I_3 părţile integralei (11), corespunzătoare respectiv la aceste intervale.

Evaluăm mai întâiu pe I_2; avem:

$$(12)\qquad |I_2| \leq \int_y^x \frac{|G_1(xs)|\,|G_2(sx)|}{(x-s)^\alpha(s-x)^\beta}ds \leq G^2\int_y^x \frac{ds}{(x\ \ s)^\alpha(s\ \ y)^\beta}$$

Dacă facem schimbarea de variabilă:

$$s=y+(x-y)t$$

www.digibuc.ro

integrala din ultimul membru a inegalității (12) devine $\frac{A_2}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}$ punând

$$A_2 = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha (1-t)^\beta}$$

avem deci

$$|I_2| \leq \frac{A_2 G^2}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}$$

Acelaș calcul ne arată în acelaș timp că:

$$I_1 < \frac{A_1 G^2}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}$$

în care avem pentru orice valoare a lui x și y, în interiorul lui a, b,

$$A_1 = \int_{a_1}^{+1} \frac{dt}{t^\alpha (1-t)^\beta} - \int_{-\infty}^{+1} \frac{dt}{t^\alpha (1-t)^\beta} \quad \left(a_1 = \frac{a-y}{x-y}\right),$$

ceeace arată că A_1 este finit, în virtutea ipotezei $\alpha+\beta > 1$; un raționament identic este aplicabil pentru A_3. Avem deci

$$\left| \int P(xs)\, Q(sy)\, ds \right| < \frac{G^2(A_1+A_2+A_3)}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}$$

ceea ce demonstră teorema.

8. **Proprietățile sâmburilor iterați.**

1°. *Sâmburile iterat de ordinul* k *al unui sâmbure Abelian, este un sâmbure de aceeaș formă, de exponent* $(k+1)\alpha - k$, *dacă acest din urmă exponent este pozitiv.*

In adevăr, după teorema precedentă, o iterație mărește exponentul $\alpha - 1$; după k iterații, exponentul va fi deci egal cu

$$\alpha + k(\alpha - 1) - (k+1)\alpha - k.$$

2°. *Șirul sâmburilor iterați al unui sâmbure abelian nu conține decât un număr finit de sâmburi singulari.*

Dacă k este primul număr întreg mai mare de cât $\frac{\alpha}{1-\alpha}$, sâmburile iterat de ordinul k nu mai devine infinit pentru x—y. In adevăr, dacă $k > \frac{\alpha}{1-\alpha}$, vom aveà $(k+1)\alpha - k < 0$.

Se poate enunță acest rezultat și sub forma următoare: Considerăm șirul fracțiunilor de forma $\frac{n}{n+1}$; dacă $\frac{k}{k+1}$ este mai mare

www.digibuc.ro

decât α, sâmburile iterat de ordinul k nu mai devine infinit pentru $x=y$.

9. **Altă formulă pentru soluţia ecuaţiei lui Fredholm.** Formula lui Fredholm

$$\mathcal{J}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = \frac{D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda}{D(\lambda)}$$

nu mai este aplicabilă în cazul unui sâmbure abelian, căci una cel puţin din urmele sâmburelui G, este infinită.

Ori formula [1]:

$$(13) \qquad -\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = n_1 + n_2\lambda + \ldots + n_k\lambda^{k-1} + \ldots$$

sau echivalenta sa

$$(14) \qquad D(\lambda) \quad e^{-\frac{n_1\lambda}{1} - \frac{n_2\lambda^2}{2} - \ldots - \frac{n_k\lambda^k}{k} - \ldots}$$

ne arată că $D(\lambda)$ este o funcţiune bine determinată de urmele acelui sâmbure.

Pentru a obţine o altă formulă, aplicabilă şi la sâmburi abeliani, vom procedà în modul următor:

Facem în relaţia (13), $n_1 - n_2 - \ldots = n_{k-1} - n_k = 0$, şi însemnăm prin $\mathcal{D}_k(\lambda)$ funcţiunea astfel obţinută. In virtutea relaţiunilor (13) şi (14), este evident că vom aveà:

$$(15) \qquad \mathcal{D}_k(\lambda) = D(\lambda)e^{\frac{n_1\lambda}{1} + \frac{n_2\lambda^2}{2} + \ldots + \frac{n_k\lambda^k}{k}}$$

şi prin urmare:

$$(16) \qquad -\frac{\mathcal{D}'_k(\lambda)}{\mathcal{D}_k(\lambda)} = n_{k+1}\lambda^k + n_{k+2}\lambda^{k+1} + \ldots$$

Pentru a obţine funcţiunea de la numărător vom utilizà relaţiunile de identificare:

$$(17) \qquad \begin{aligned} A_0(xy) &= N(xy) \\ A_1(xy) &= N(xy)a_1 + \int N(xs)A_o(sy)ds \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_p(xy) &= N(xy)a_p + \int N(xs)A_{p-1}(sy)ds \end{aligned}$$

[1]) Pentru a uşurà scrierea, vom scri în acest capitol ecuaţiunea lui Fredholm cu semnul — înaintea integralei.

www.digibuc.ro

unde a_p înseamnă acum *coeficienții lui* $D_k(\lambda)$; în particular avem : $a_1 = a_2 = \ldots a_k = o$.

Din cauza caracterului de recurență al relațiunilor (17), funcțiunea $\sum_{p=o}^{\infty} A_p(xy)\lambda^p$, pe care o vom însemnà prin $\mathfrak{D}_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ este aceeaș ca acea obținută făcând direct $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = o$, în expresiunea lui $\mathfrak{D}_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Am obținut astfel două serii în λ ; $\mathfrak{D}_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ și $\mathfrak{D}_k(\lambda)$ ai căror coeficienți au un sens perfect determinat, și în cazul sâmburelui abelian pentru care $(k+1)\alpha - k < o$; în afară de asta, expresiunea

$$\frac{\mathfrak{D}_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\mathfrak{D}_k(\lambda)}$$

verifică formal ecuațiunea lui Fredholm. Ne rămâne acum a demonstra că aceste serii sunt și funcțiuni întregi în λ. In acest caz vom aveà

$$\mathfrak{I}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D(\lambda)} = \frac{\mathfrak{D}_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\mathfrak{D}_k(\lambda)}$$

ceea ce ne dă, ținând seamă de (14) :

$$\mathfrak{D}_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\frac{n_1\lambda}{1} + \frac{n_2\lambda^2}{2} + \ldots + \frac{n_k\lambda^k}{k}} \cdot \mathfrak{D}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vom stabili această proprietate pentru $\mathfrak{D}_k(\lambda)$. Observăm pentru aceasta, că formula (16) poate încă să se scrie, grupând termini din k în k :

$$(18) \quad -\frac{\mathfrak{D}'_k(\lambda)}{\mathfrak{D}_k(\lambda)} = \sum_{p=1}^{\infty} n_{pk+1}\lambda^{pk} + \lambda\sum_{p=1}^{\infty} n_{pk+2}\lambda^{pk} + \ldots + \lambda^{k-1}\sum_{p=1}^{\infty} n_{pk+k}\lambda^{k}$$
$$- \Delta_1(\lambda^k) + \lambda\Delta_2(\lambda^k) + \ldots + \lambda^{k-1}\Delta_k(\lambda^k).$$

Al doilea membru al relației (18) este o funcțiune meromorfă de λ.

In adevăr, expresiunea :

$$\mathfrak{I}_r(xy) \quad \sum_{p=1}^{\infty} N_{pk+r}(x_j)\lambda^{pk}$$

www.digibuc.ro

este elementul analitic al soluțiunii ecuațiunii integrale.

$$\mathcal{N}_r(xy)=N_{k+r-1}(xy)+\lambda^k\int N_k(xs)\mathcal{N}_r(s.y)ds.$$

Ea este, deci, o funcțiune meromorfă de λ, perfect determinată, pentru că sâmburile $N_k(xy)$ nu mai este singular.

Dar, pe de altă parte, avem :

$$\Delta_r(\lambda) \quad \lambda^k\int\mathcal{N}_r(s.s)ds.$$

Funcțiunea $\Delta_r(\lambda)$ este deci și ea o funcțiune meromorfă de λ. Al doilea membru al relației (18), va reprezentà deci, el însuș o funcțiune meromorfă de λ, pentru că este suma a k funcțiuni meromorfe. Ori, *el este identic egal* cu derivata logaritmică a unei funcțiuni; această din urmă funcțiune nu poate, deci, fi decât o funcțiune întreagă de λ.

10. **Ordinul lui $D_k(\lambda)$. Extensiunea teoriei la sâmburii abeliani** [1]).

Pentru a determinà ordinul lui $D_k(\lambda)$, vom stabilì mai întâiu o formulă preliminară. In relațiunea

$$\log D(\lambda)-\frac{n_2\lambda^1}{1}\quad\frac{n_2\lambda^2}{2}-\ldots-n_k\frac{\lambda^k}{k}-\ldots.$$

să înlocuim λ, respectiv prin λ, $\alpha\lambda$, $\ldots\alpha^k\lambda$, însemnând prin α o rădăcină primitivă de gradul $k+1$ a unității ; obținem

$$(19)\quad \log D(\lambda)\cdot D(\alpha\lambda)\ldots D(\alpha^k\lambda)=-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_{(k+1)p}\lambda^{(k+1)p}}{p}.$$

Fie $D_k(\lambda)$ funcțiunea determinantă a sâmburelui $N_k(xy)$; se recunoaște îndată că al doilea membru al relației (19), nu este altceva decât $\log D_k(\lambda^{k+1})$. Vom aveà deci, trecând de la logaritmi la numere:

$$D(\lambda)D(\alpha\lambda),..D(\alpha_k\lambda)-D_k(\lambda^{k+1}).$$

Se deduce imediat [2]),

$$\mathcal{D}_k(\lambda)\mathcal{D}_k(\alpha\lambda)\ldots\mathcal{D}_k(\alpha^k\lambda)\quad D(\lambda)D(\alpha\lambda),..D(\alpha^k\lambda)-\mathcal{D}_k(\lambda^{k+1}).$$

---

[1]) A se vedeà H. POINCARÉE: Remarques diverses sur l'équation de Fredholm (Acla Math. tome. 33. 1910) și T. LALESCO. Sur l'ordre de la fonction $D(\lambda)$ de Fredholm. (Compte Rendus Paris t. 145 pag. 136).

[2]) Se poate stabili, prin aceeaș metodă, o formulă analoagă pentru $\mathcal{N}(xy\lambda)$; avem :

$$\mathcal{N}(xy,\lambda).\ \mathcal{N}(xy;\alpha\lambda)\ldots.\ \mathcal{N}(xy;\alpha^k\lambda)=\mathcal{N}_k(xy;\lambda^{k+1})+$$

Rezultă și o formulă analoagă pentru $D_k(xy,\lambda)$.

www.digibuc.ro

Fie acum m ordinul lui $\mathfrak{D}_k(\lambda)$. Cum funcţiunile $\mathfrak{D}_k(\alpha^i\lambda)$ au evident acelaş ordin, produsul lor va fi şi el de ordinul m. Dar egalitatea precedentă ne arată că ordinul produsului este egal cu acel a lui $\mathfrak{D}_k(\lambda^{k+1})$, care îl ştim, este cel mult egal cu $2(k+1)$. Rezultă deci că $m \leq 2(k+1)$.

Ordinul funcţiunii $D_k(\lambda)$ *este deci cel mult egal cu* $2k+2$.

Formula

$$-\log D_k(\lambda) = \frac{n_{k+1}\lambda^{k+1}}{k+1} + \ldots$$

ne permite atunci de a conchide teorema următoare:

Condiţiunea necesară şi suficientă pentru ca un sâmbure abelian, de exponent α *şi* k [1]*, să nu aibă nici o valoare caracteristică, este ca urmele sale, plecând de la acea de rang* $2k+3$*, să fie toate nule.*

Toată teoria sâmburilor regulaţi, este atunci în *întregime* aplicabilă şi sâmburilor abeliani.

Observare. Pentru cazul când $\alpha \leq \frac{1}{2}$, se poate uşor obţine suprimarea factorului $e^{n_1\lambda}$, în chiar formulele lui Fredholm.

E de ajuns pentru aceasta de a înlocui în fiecare din determinanţii $N\begin{pmatrix} x_1x_2 \ldots x_p \\ x_1x_2 \ldots x_p \end{pmatrix}$ şi $N\begin{pmatrix} xx_1x_2 \ldots x_p \\ xx_1x_2 \ldots x_p \end{pmatrix}$ termenii diagonalei principale prin zero.

Această elegantă observaţie este datorită d-lui D. Hilbert [2]); ea pare greu susceptibilă de ar fi direct generalizată.

11. **Ecuaţiunea lui Fredholm în domeniul complex.** Considerăm ecuaţiunea:

$$\varphi(x) - \lambda\int N(xs)\varphi(s)ds = f(x)$$

unde N(xy) înseamnă o funcţiune analitică întreagă, în raport cu variabilele x şi y. Să luăm în locul intervalului real (a,b) o curbă oarecare de integrare C_1, între afixele a şi b. Formulele d-lui Fredholm sunt evident aplicabile şi pe drumul complex C_1, cu

[1]) Se poate însemnă astfel, pentru prescurtare un sâmbure abelian de exponent α, al cărui sâmbure it-rat de k ori, este primul care nu se mai anulează pentru $x=y$.

[2]) Gött. Nachr. Erste Mitt. 1904, pag. 81.

www.digibuc.ro

condiția de a înlocui pretutindeni integralele rectilinii prin integrale devariabila complexă dealungul lui C_1. Vom scrie acea soluțiune sub forma :

$$\varphi(x;a,b).$$

Ea este o funcțiune uniformă de x *și de parametrii* a *și* b.

In adevăr diversele integrale care figurează în expresiunea lui $\varphi(x,a,b)$ nu depind de curba C_1, dacă se fixează punctele x, a și b, pentru că N(xy) este o funcțiune întreagă de x și y.

Această proprietate importantă *nu se mai menține* dacă sâmburele nu mai este o funcțiune întreagă. In acest din urmă caz, funcțiunea $\varphi(x;a,b)$ este o funcțiune *multiformă*, și această circumstanță ne dă dejà o indicațiune asupra complicării problemei. Să luăm, cu d-l E. Picard [1]), exemplul cel mai simplu de acest soi de sâmbure : $N(xy)=\frac{I}{x}$, adică să considerăm ecuațiunea integrală :

$$\varphi(x) - \int_c \frac{I}{x}\varphi(s(ds - f(x)$$

sau

$$x\varphi(x) - \int_c \varphi(s)\,ds = f(x).$$

Soluția este imediată, punând :

$$\int_c \varphi(s)ds = k$$

avem :

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{k}{x}$$

Constanta k se determină integrând această relațiune dealungul lui C_1, ceea ce ne dă :

$$k = \int_c f(s)ds + k\int_c \frac{ds}{s}$$

de unde

$$k - \frac{\int_c f(s)ds}{I - \int_c \frac{ds}{s}}$$

[1]) E. Picard. Une théorème générale sur les équations intégrales de 3-me espèce. (Comptes-Rendus, Février 1910, tome 152).

www.digibuc.ro

Avem, deci, în definitiv:

$$\varphi(x) \quad -f(x)+\frac{1}{x}\frac{\int_c f(s)ds}{1-\int_c \frac{ds}{s}}$$

Să luăm ca extremități a și b ale curbei C, două puncte reale, unul pe axa pozitivă și altul pe axa negativă. Este evident că $\varphi(x)$ este o funcție multiformă, pentru că

$$\int_{\widehat{ab}} \frac{ds}{s} = \log\left(\frac{b}{a}\right) + 2ni\pi$$

astfel că valoarea funcțiunii $f(x)$, apare ca *depinzând de parametrul arbitrar întreg n*. Drumul de integrare nu trebuie evident să treacă prin origină, astfel că dacă voim a ne menține pe axa reală, va trebui să înconjurăm origina, sau mai bine cum a indicat d-l E. Picard, să excludem un mic interval (ε,η) împrejurul originei și să facem să tindă în urmă ε și η simultan către zero, raportul dintre ele rămânând constant; soluțiunea apare atunci ca depinzând de un parametru absolut arbitrar.

12. *Teorema d-lui Picard*[1]). Intr'un mod mai general, să considerăm sâmburele $\frac{1}{x} N(xy)$, unde $N(xy)$ înseamnă o funcțiune întreagă de x și y.

Se poate demonstră că *soluțiunea ecuațiunii lui Fredholm corespunzătoare, este, în domeniul complex, o funcțiune multiformă, depinzând omografic de un parametru arbitrar.*

E de ajuns pentru aceasta, a demonstră că funcțiunile. $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda$ și $D(\lambda)$ sunt funcțiuni care depind linear de un același parametru întreg n.

Să facem mai întâi observarea următoare:

Determinatul $N\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_p \\ x_1 x_2 \ldots x_p \end{pmatrix}$ *este divizibil prin* $\Delta^2 = \prod_{k=1}^{p} (x_i - x_k)^2$, *dacă* $N(xy)$ *este un sâmbure cu derivată lipschitziană.* In adevăr determinantul se anulează împreună cu prima sa derivată în raport cu x_i, pentru $x_i = x_k$.

[1]) E. PICARD, Une théorème générale sur les équations intégrales singuliéres, (Comptes-Rendus, Juin 1911, tome 152).

www.digibuc.ro

Să luăm acum expresiunea :

$$(20) \qquad \int \frac{1}{c s_1 s_2 \dots s_p} N\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_p \\ s_1 s_2 \dots s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p .$$

Rezidiul acestei integrale în raport cu s_1, este

$$R_p = \int \frac{1}{c s_2 \dots s_p} N\begin{pmatrix} o\, s_2 \dots s_p \\ o\, s_2 \dots s_p \end{pmatrix} ds_2 \dots ds_p .$$

Or, în virtutea proprietății precedente, cantitatea

$$N\begin{pmatrix} o\, s_2 \dots s_p \\ o\, s_2 \dots s_p \end{pmatrix}$$

este de sigur divizibilă prin $s_2^2 s_2^2 \dots s_2^2$. Reziduul R_p. reprezintă deci o funcțiune uniformă, care nu mai depinde de drumul de integrare C_1, acelaș pentru toate variabilele $s_1 \dots s_p$. Cum, pe de altă parte

$$\frac{1}{s_1 s_2 \dots s_p} N\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_p \\ s_1 s_2 \dots s_p \end{pmatrix}$$

este o funcțiune simetrică de $s_1\, s_2 \dots s_p$, rezultă că înconjurând odată origina, în sensul pozitiv, expresiunea (20) se va mări cu $p \cdot 2\pi i \cdot R_p$.

Prin urmare, în domeniul complex, vom avea :

$$D(\lambda) = D_1(\lambda) + 2\pi i n \lambda D_2(\lambda),$$

punând :

$$D_2(\lambda) = \sum_{p=o}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int \frac{1}{c_1 s_1 s_2 \dots s_p} N\begin{pmatrix} o\, s_1 s_2 \dots s_p \\ o\, s_1 s_2 \dots s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 — ds_p .$$

Funcțiunile $D_1(\lambda)$ și $D_2(\lambda)$ sunt evident funcțiuni întregi de λ. Vom avea, de asemenea, în acelaș timp :

$$D_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = D_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda + 2\pi i n \cdot \lambda D_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda$$

unde avem :

$$D_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = \sum \frac{\lambda^p}{p!} \int \frac{1}{c_1 s_1 s_2 \dots s_p} N\begin{pmatrix} o\, s_1 s_2 \dots s_p \\ o\, s_1 s_2 \dots s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 — ds_p$$

teorema este astfel demonstrată.

13. **Exemple diverse.** Vom termină acest capitol dând două exemple tipice cari pun bine în evidență nouile fenomene analitice ce se prezintă în cazul ecuației singulare a lui Fredholm. Vom

www.digibuc.ro

adăugă în urmă o observaţie importantă datorită d-lui E. Picard, anume că, în cazul singular, caracterul analitic în λ al soluţiunii, *depinde esenţial de al doilea membru.*

14. **Exemplu de spectru segmentar.** Să considerăm ecuaţiunea integrală :

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^{\infty} e^{-(x-s)}\varphi)s)ds = f(x). \tag{21}$$

Căutăm în ce caz ecuaţiunea *omogenă*

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^{\infty} e^{-(x-s)}\varphi(s)ds = o \tag{22}$$

va admite soluţiuni.

Derivăm pentru aceasta (21) de două ori în şir, ceea ce ne dă ecuaţiunile

$$\varphi'(x) + \lambda e^{-x}\int_0^{x} e^{s}\varphi(s)ds - \lambda e^{x}\int_x^{\infty} e^{-s}\varphi(s)ds = f'(x) \tag{23}$$

$$\varphi''(x) + (2\lambda - 1)\varphi(x) = f''(x) - f^{x}(x). \tag{24}$$

Deci, orice soluţie a lui (22), trebuie să verifice ecuaţia

$$\varphi''(x) + (2\lambda - 1)\varphi(x) = o. \tag{25}$$

Reciproc, ne ridicăm de la (24) la (21) prin două integrări succesive; pentru ca constantele de integrare să fie nule, trebuie şi e deajuns ca :

$$\begin{aligned} \varphi'(o) - \lambda\int_0^{\infty} e^{-s}\varphi(s)ds &= f'(o) \\ \varphi(o) - \lambda\int_0^{\infty} e^{-s}\varphi(s)ds &= f(o) \end{aligned} \tag{26}$$

ce se obţin făcând $x = o$ în relaţiunile (23) şi (21). Prin urmare, orice soluţie a lui (25) care verifică condiţiunile

$$\varphi(o) = \varphi'(o) = \lambda\int_0^{\infty} e^{-s}\varphi(s)ds \tag{27}$$

va fi şi o soluţie a ecuaţiunii integrale (22).

Avem atunci două cazuri de considerat după semnul lui $2\lambda - 1$:

a) Să luăm mai întâiu $2\lambda - 1 = \mu^2$, adică să presupunem :

$$\frac{1}{2} < \lambda < \infty.$$

Soluţiunea ecuaţiei (25) în acest caz care verifică condiţiunile (27), este, cum arată un calcul uşor,

$$\sin \mu x + \mu \cos \mu . x; \tag{28}$$

www.digibuc.ro

b) Dacă acum $1-2\lambda=\mu^2$, este necesar pentru ca integrala (27) să existe, ca să avem $\mu<1$, adică $0<\lambda<\frac{1}{2}$. In acest caz, soluțiunea corespunzătoare este:

$$\text{sh}.\mu.x+\mu\,\text{ch}.\mu x. \tag{29}$$

Soluțiunea (28) este finită oricare ar fi x, pe când soluțiunea (29) devine infinită cu x. Avem deci rezultatul următor:

Ecuațiunea integrală (21) *are un spectru continu de la zero până la infinit.*

Pentru fiecare valoare a lui λ situată între zero și $\frac{1}{2}$ ecuațiunea omogenă are o soluție care devine infinită cu x; între $\frac{1}{2}$ și $+\infty$, ecuațiunea omogenă are o soluție și una singură, finită în tot intervalul de la zero până la infinitul pozitiv.

15. **Observația d-lui E. Picard** [1]). Trecem acum la ecuațiunea (21) cu al doilea membru. Orice soluție a ecuației integrale (21) verifică ecuația diferențială (24) și reciproc, orice soluție a ecuației (24) care, în afară de aceasta, verifică condițiile (26) va fi o soluție a ecuației integrale (21). Condițiile (27) pot încă să se scrie:

$$\varphi'(0)-f'(0)=\varphi(0)-f(0)=\lambda\int_0^\infty e^{-s}\varphi(s)ds. \tag{30}$$

Vom arătà, după d-nul Picard, că în acest caz, natura analitică a ecuațiunii integrale (21), nu mai este așa simplă ca în cazul regulat și că ea *depinde de al doilea membru.* Să luăm pentru aceasta mai întâi:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx$$

constantele A_n fiind astfel că seria $\sum_{n=0}^{\infty}n^2A_n$ să fie convergentă.

Punând și

$$\varphi(x)=\sum a_n\sin.nx$$

[1]) E. Picard. Sur une équation intégrale singulière. (Comptes Rendus, Janvier 1911, Tome 152).

A se vedeà și: Sur un exemple simple d'une équation singulière de Fredholm. (Ann. de l'Ecole Normale Supérieure, Juillet 1911).

www.digibuc.ro

ecuaţia (25) ne dă imediat:

$$a_n = A_n \frac{n^2 + 1}{n^2 + 1 - 2\lambda}.$$

Soluţiunea generală a lui (24) este, deci, în ipotesa a:

$$A \sin \mu x + B \cos \mu x + \sum A_n \frac{n^2 + 1}{n^2 - \mu^2} \sin nx.$$

Condiţiile (10) ne vor determină pe A şi B; ele ne dau imediat:

$$B = A\mu + (1 + \mu^2) \sum \frac{n\, An}{n^2 - \mu^2}.$$

Soluţiunea generală va fi, deci, o funcţiune admiţând singurul punct critic transcedent $\lambda = \frac{1}{2}$ şi polurile $\lambda = \frac{n^2 + 1}{2}$.

Luăm acum, al doilea exemplu al d-lui E. Picard

$$f(x) = \int_0^\infty h(s) \sin (xs) ds$$

funcţiunea h(x) fiind astfel că integrala:

$$\int_0^\infty h(s) s^2 ds$$

există.

Punând

$$\varphi x) = \int_0^\infty h(s) \Psi(s) \sin (xs) ds,$$

se obţine imediat din (25):

$$\Psi(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 1 - 2\lambda}$$

Soluţiunea generală a lui (25) va fi, deci, în cazul a:

$$\varphi(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x + \int_0^\infty \frac{s^2 + 1}{s^2 - \mu^2} h(s) \sin (xs)\, ds.$$

Condiţiunile (20) ne dau:

$$B = A\mu + (1 + \mu^2) \int_0^\infty \frac{s \,.\, h(s) ds}{s^3 - \mu^2}$$

şi, prin urmare, soluţiunea va aveà forma:

$$\varphi(x) = A (\sin \mu x + \mu \cos \mu x) + \int_0^\infty \frac{s^2 + 1}{s^2 - \mu^2} h(s) \sin (xs) ds$$

$$+ (1 + \mu^2) \int_0^\infty h(s) \frac{sds}{s^2 - \mu^2}$$

www.digibuc.ro

Dacă h(x) este o funcţiune neanalitică, φ(x) va admite ca tăietură esenţială, segmentul $\left(\frac{1}{2}, +\infty.\right)$

16. **Exemplu de sâmbure a lui Fourier.** Se poate [1]) numì astfel, sâmburii având valori caracteristice *cu o infinitate de funcţiuni caracteristiee corespunzătoare.*

Ştim că această circonstanţă nu poate să aibă loc pentru ecuaţiunea regulată. Iată un exemplu foarte simplu de o asemenea singularitate.

Să considerăm ecuaţia integrală:

$$(31) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\infty} \sin(xs)\varphi(s)ds = f(x)$$

Avem:

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\Pi}{2}} e^{-as} + \frac{s}{a^2+s^2} \right) \sin(xs)ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-as} \sin(xs)ds + \int_0^{\infty} \frac{s \cdot \sin(xs)}{a^2+s^2} ds \quad (a>0).$$

Sau pentru că:

$$\int_0^{\infty} e^{-as} \sin(xs)ds = \frac{x}{a^2+x^2}$$

şi

$$\int_0^{\infty} \frac{s \cdot \sin(xs)}{a^2+s^2} ds = \frac{\pi}{2} e^{-ax}$$

vom aveà:

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as} + \frac{s}{a^2+s^2} \right) \sin(xs)ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x}{a^2+x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \right]$$

ceeace arată că ecuaţia (31), fără membru al doilea, admite earacteristica $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ cu infinitatea de funcţiuni caracteristice

$$\frac{x}{a^2+x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \quad (a>0).$$

Acelaş calcul arată în acelaş timp că ecuaţia (31) admite de ase-

[1]) H. Weyl. Singuläre Integralgleichungen. (Inaugural Disertation, 1908).

www.digibuc.ro

menea valoarea caracteristică $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ cu funcţiunile caracteristice:

$$\frac{x}{a^2+x^2} \quad -\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ax} \qquad (a>0).$$

CAP. II

II. ECUAŢIUNI INTEGRALE DE ORDIN SUPERIOR

17. **Definiţiuni; istoric.** Trecerea la ecuaţiunile mai generale de tipul Fredholm sau Volterra, poate fi făcută în două moduri diferite:

1⁰ Funcţiunea necunoscută poate să figureze în ecuaţiune, la puteri de diferite grade >1; de exemplu:

$$\varphi(x) + \lambda\int N(xs)\,\varphi^p(s)\,ds = f(x).$$

Acestea sunt ecuaţiile integrale *nelineare.*

2⁰ Funcţiunea poate să figureze la nişte puteri *iterate* de ordin superior unităţii; de exemplu, ecuaţia

$$\varphi(xy) + \lambda\int N(xs)\,\varphi(sy)\,ds + \mu\int N(xs)\,\varphi_1(sy)\,ds = f(xy)$$

numind putere iterată de ordinul n, expresiunea:

$$\varphi_n(xy) = \int \varphi(xs_1)\,\varphi(s_1\,s_2)\,..\,\varphi(s_{n-1}y)\,ds_1\,ds_2\,..\,ds_{n-1}.$$

Aceste două categorii de ecuaţiuni au fost studiate din punct de vedere formal; punctul esenţial care se degajează diu toate aceste cercetări, este o însemnată analogie cu teoria funcţiunilor analitice, atâta timp cât operaţiunile funcţionale figurează analitic în ecuaţiunile integrale.

Prima clasă de ecuaţiuni a fost considerată de d-l E. Schmidt [1]). Aceste ecuaţiuni pot fi folositoare în teoria ecuaţiunilor cu derivate parţiale nelineare [2]). Dar mai ales a doua clasă de ecuaţiuni,

[1]) E. SCHMIDT. Zur theorie der liniaren und nicht liniaren Integralgleichung. III. Theil (Math. Ann. Bd. 68, 1908, pag. 370—399).

[2]) A se vedeà la acest subiect literatura dejà bogată a şcoalei Italiene:

V. VOLTERRA. Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali. (Atti. Reale Accadamia dei Lincei, Februarie 1910).

Id. Asservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali (Ibid. Aprilie 1910).

Id. Sopra le funzioni permutabili (Ibid. Aprilie 1910).

Id. Equazioni integro-differenziali con limite constanti (Ianuarie 1911).

Id. Contributo allo studio delle funzioni permutabili (Martie 1911).

Id. Sopra le funzioni permutabili di 2-a specie e le equazioni integrali (Aprilie 1911).

SINIGAGLIA. Sulle funzioni permutabili di secondo specie (Aprilie 1911).

Să se vadă de asemenea lucrările d-lor LAURICLLA, AMOROSE şi PICONE, apărute în aceiaşi revistă. (1908—1911).

www.digibuc.ro

considerată de d-l Volterra, oferă un câmp de cercetări noui, şi prezintă un interes analitic special, atât prin eleganţa metodei, cât şi prin aplicaţiunile posibile în studiul fenomenelor neanalitice. Ne vom mărginì a da aici şi numai indicaţiuni generale.

ECUATIUNI NELINEARE

18. **Ecuaţiunea lui Volterra.** Să luăm ecuaţiunea lui Volterra neliniară:

$$\varphi(x) + \int_0^x F[x,s,\varphi(s)]ds = f(x) \qquad (32)$$

vom face ipotezele generale următoare:

1⁰ Funcţiunea $F(x,y,z)$ este o funcţiune perfect determinată $< m$, în domeniu $|x|$ şi $|y| < a$, $|z| < b$, şi verifică în raport cu z, în acest domeniu, condiţiunea lui Lipschitz:

$$|F(x,y,z_1) - F(xyz_2)| < a\,|z_1 - z_2|$$

2⁰ Funcţiunea $f(x)$ se anulează pentru $x = o$; fie $|x| < a'$ intervalul unde avem $|f(x)| < b$. Ea verifică şi condiţia lui Lipschitz:

$$|f(x) - f(y)| < k\,|x - y|$$

In aceste condiţiuni, se poate obţine o soluţie a lui (32), cu ajutorul metodei aproximaţiilor succesive, luând:

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

şi ca ecuaţie generală de recurenţă:

$$\varphi_n(x) + \int_0^x F[x,s,\varphi_{n-1}(s)]ds = f(x) \qquad (33)$$

A doua aproximaţie este dată prin relaţiunea:

$$\varphi_1(x) = f(x) - \int_0^x F[x_1 sf(s)]\,ls$$

şi în intervalul $|x| < a'$, avem în virtutea ipotezelor precedente:

$$|\varphi_1(x)| < (K + m)x$$

Pentru ca să avem:

$$|\varphi_1(x)| < b$$

e de ajuns ca:

$$|x| < \frac{b}{k+m}.$$

www.digibuc.ro

Dacă, deci, h înseamnă cel mai mic din cele trei numere, a, a′ şi $\frac{b}{k+m}$, în intervalul $|a| < h$, vom avea de sigur pentru orice aproximaţie:

$$|\varphi_n(x)| < b$$

şi, prin urmare, toate aproximaţiile vor avèà succesiv un sens perfect determinat.

Pentru a demonstrà acum convergenţa aproximaţiilor, e de ajuns să considerăm relaţiunea:

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = \int_0^x [F(xs, \varphi_{n-1}(s)] - F(x, s, \varphi_{n-2}(s)]ds = o$$

de unde se deduce imediat:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < a\int_0^x |\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}'s)| \, ds$$

cu

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| < ax$$

în mod general:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < \frac{ax^n}{n!}$$

ceeace ne arată că funcţiuuea:

(33′) $\varphi_n(x) = \varphi_o(x) + \varphi_1(x) - \varphi_o(x) + \ldots + \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$

tinde de sigur către o funcţiune limită $\varphi(x)$ care este, după (33), soluţiunea căutată.

Observări. 1⁰ Demonstraţiunea precedentă este o generalizare a aceleia pe care d-l E. Picard a indicat'o pentru ecuaţiunea diferenţială:

$$\frac{dy}{dx} = F'(x_1 y)$$

Se poate, de altminteri, pune această din urmă ecuaţiune sub forma integrală:

$$y(x) - \int_0^n F[s, y(s)] \, ds = C$$

şi rezultatul precedent dă imediat, ca un caz particular, teorema d-lui E. Picard.

www.digibuc.ro

2⁰ Se poate înlătură condiţiunea $f(o)=o$, atâta timp cât $f(o)=l<b$; în acest caz se va luà ca primă aproximaţie.

$$\varphi_o(x) = f(x) - f(o)$$

şi va trebuì să înlocuim $\frac{b}{m+k}$ prin $\frac{b-l}{m+k}$ [1].

19. **Ecuaţiunea lui Fredholm.**

Să considerăm ecuaţiunea lui Fredholm neliniară.

$$(34) \qquad \varphi[(x) + \lambda\int_a^b F(x, s, \varphi(s)]\,ds = f(x)$$

în ipoteze analoage cu acelea din numărul precedent. Vom presupune:

1⁰ Funcţiunea $F(x, y, z)$ perfect determinată şi $<m$ dacă x şi y au valori oarecare în intervalul (ab) şi $z<\rho$. Ea verifică încă condiţiunea lui Lipschitz în raport la z.

2⁰ Modulul maxim al funcţiunii $f(x)<\rho$, în intervalul (ab).

In aceste condiţiuni, se poate aplicà exact aceeaş metodă a aproximaţiilor succesive; dacă

$$\lambda < \frac{\rho - f}{m(b-a)}$$

raţionamentul precedent ne arată că toate aproximaţiile vor aveà un sens bine determinat. Vom aveà, apoi:

$$| \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) | < m \cdot \lambda^n k^n (b-a)^n$$

şi, prin urmare, dacă

$$\lambda < \frac{1}{k(l-a)}$$

seria aproximaţiilor (33′) va converge de sigur către o funcţiune care va fi soluţiunea căutată.

Avem, deci, acest rezultat:

Dacă λ este suficient de mic, ecuaţiunea (34) are o soluţiune şi una singură.

---

[1]) Pentru sistemele de ecuaţiuni nelineare a se vedeà:

E. Cotton. Eq. différentielles et éq. intégrales (Bull. Soc. M. de France, 1910, pag. 41) şi memoriile d-lui E. Picone (Rendiconti di Circolo math. di Palermo, 1910, 1911).

www.digibuc.ro

Observare. In locul metodei aproximaţiilor successive, se poate întrebuinţà metoda majorantelor, încercând a verificà (34) printr'o desvoltare de forma:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots$$

Coeficienţii se calculează într'un mod regulat şi convergenţa seriei, împreună cu unicitatea soluţiunii rezultă din faptul că ecuaţiunea

$$\varphi(x) + \lambda F[x, x, \varphi(x)] = f(x)$$

are o soluţie şi una singură în $\varphi(x)$, care se anulează cu λ. Se poate într'un mod mai general aplicà aceeaş metodă la ecuaţiunea

$$(35)\quad \varphi(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\int N(x.s_1s_2\ldots s_m)\varphi(s_1)^{\alpha_1}\varphi(s_2)^{\alpha_2}\ldots\varphi(s_m)^{\alpha_m}ds_1ds_2\ldots ds_m = f(x)$$

sau încă mai general

$$(36)\quad \varphi(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\int N(x.s_1s_2\ldots s_m)F_m[\varphi(s_1)\varphi(s_2)\ldots\varphi(s_m)]ds_1ds_2\ldots ds_m = f(x).$$

3. *Cercetările d-lui Schmidt.* In cercetările sale asupra ecuaţiunilor nelineare, d-l Schmidt consideră ecuaţiunea generală următoare:

$$(37)\quad \varphi(x) + \int N(xs)\varphi(s)ds + \sum\int N(xs_1s_2\ldots s_m)\varphi(s_1)^{\alpha_1}h(s_1)^{\beta_1}\ldots\varphi(s_m)^{\alpha_m}h(s_m)^{\beta_m}ds_1\ldots ds_m = o$$

unde suma este întinsă la toate valorile întregi şi positive ale lui α_i şi β_i, unul cel puţin din exponenţii α_i şi β_i fiind totdeauna diferit de zero; funcţiunea necunoscută este $\varphi(x)$. Această ecuaţiune, din punctul de vedere al d-lui Schmidt, este în întregime echivalentă cu ecuaţia (35), cu condiţie de a introduce în primul membru al lui (35), termenul

$$\int N(xs)\varphi(s)ds.$$

Pentru a o rezolvì, avem, deci, două cazuri de considerat, după cum ecuaţiunea

$$(38)\qquad \varphi(x) + \int N(xs)\varphi(s)ds = o$$

www.digibuc.ro

admite soluţiuni diferite de zero sau nu. In al doilea caz, aplicând prima teoremă a lui Fredholm la ecuaţiunea (37), scrisă sub forma:

$$\varphi(x) + \int N(xs)\varphi(s)ds = F(x) \tag{39}$$

se obţine o ecuaţiune exact de forma (35) şi cădem astfel peste cazul precedent.

Luăm acum primul caz şi presupunem mai întâiu că ecuaţia (38) nu admite decât o singură soluţiune $\varphi_1(x)$. In acest caz soluţiunea lui (39) va fi:

$$\varphi(x) = F(x) - \int \mathcal{N}(xs)F(s)ds + a\varphi_1(x) \tag{40}$$

unde *a* înseamnă o constantă arbitrară, *cu condiţie însă ca să avem:*

$$\int F(s)\varphi_1(s)ds = 0 \tag{41}$$

Eliminarea lui $\varphi(x)$ între ecuaţiile (40) şi (41) este posibilă, pentru că ecuaţia (40) este de tip regulat; obţinem astfel o ecuaţie *analitică în a;* numărul soluţiilor lui (40) depind, deci, esenţial de natura acestei ecuaţiuni. Acest rezultat este în întregime echivalent cu acel al d-lui E. Schmidt, care numeşte ecuaţiunea în *a*, *ecuaţiunea de ramificaţie*[1]). Metoda precedentă se întinde evident fără nici o dificultate la cazul general.

ECUAŢIUNI DE ORDIN ITERATIF SUPERIOR

20. Funcţiuni permutabile. Proprietăţi.

Două funcţiuni A(xy) şi B(xy) sunt *permutabile* în intervalul xy[2]), dacă avem:

$$\int_x^y A(xs)\,B(sy)ds = \int_x^y B(xs)\,A(sy)ds.$$

Expresiunea $A.B = BA$ va fi numită *produsul compus* al lui A şi B. Se pot stabili proprietăţile următoare:

a) O funcţiune este totdeauna permutabilă cu ea însăşi.

Această proprietate este evidentă.

---

[1]) A se vedeà şi PAUL LÉVY: Sur les équations intégrales non linéaires. (Comptes Rendus Avril 1910), şi G. BRATU: Sur les équations intégrales non linéaires. (Comptes Rendus. Avril 1910).

[2]) Permutabile de prima specie după d-l Volterra.

www.digibuc.ro

Expresiunea

$$\int_x^y A(xs)\, A(sy)ds = A_2(xy)$$

va fi *pătratul compus al lui* A(xy) sau a doua putere iterată.

b) Insemnăm prin *putere iterată de gradul n*, expresiunea definită prin relaţiunea de recurenţă:

$$A_n(xy) = \int_x^y A_1(xs)\, A_{n-1}(sy)\, ds.$$

Avem:

Două puteri iterate ale unei funcţiuni A(xy) *de grade* m *şi* n, *sunt permutabile între ele şi produsul lor compus este egal cu puterea iterată* m+n *a funcţiunii* A(xy).

Pentru a stabilì această propoziţiune, e deajuns, după un algoritm bine cunoscut, de a considerà cazul $n = 1$, $n = 2$, adică de a stabilì relaţiunea

$$\int_x^y A_1(xs)\, A_2(sy)\, ds = \int_x^y A_2(xs)\, A_1(sy)\, ds.$$

Ori avem:

$$\int_x^y A_1(xs)\, A_2(sy)\, ds = \int_x^y A_1(xs) \int_s^y A_1(st)\, A_1(ty)\, dt =$$

$$= \int_x^y A_1(ty) \int_x^t A_1(xs) A_1(st) ds = \int_x^y A_2(xt) A_1(ty) dt.$$

Acest rezultat a fost obţinut aplicând numai formula lui Dirichlet.

Avem, deci, în general

$$A_{m+n}(xy) = \int_x^y A_m(xs) A_n(sy) ds$$

c) Două sume de funcţiuni permutabile sunt de asemenea permutabile, şi produsul lor compus se obţine după regula distributivă a ìmulţirii ordinare.

In adevăr, fie: A(xy), B(xy), C(xy), D(xy), patru funcţiuni permutabile între ele, şi însemnăm:

$$P(xy) = A(xy) + B(xy)$$
$$Q(xy) = C(xy) + D(xy).$$

www.digibuc.ro

Avem:

$$\int P(xs)Q(sy)ds = \int_x^y [A(xs) + B(xs)][C(sy) + D(s\lambda)]\,ds$$
$$= AC + AD + BC + BD.$$

Funcţiunile P şi Q sunt deci şi ele permutabile.

21. **Corp integral. Teoremă fundamentală.** Proprietăţile precedente pot să fie concentrate şi prezentate sub forma următoare: Fie A(xy), B(xy) ... L(xy) un număr finit *n*, de funcţiuni *permutabile în intervalul* xy, şi definite într'un interval real a, b. Să le aplicăm un număr finit de ori şi într'o ordine arbitrară operaţiunile de adunare algebrică, şi de înmulţire compusă.

Totalitatea funcţiunilor astfel obţinute, formează un corp K.

Considerăm de asemenea corpul k, a polinoamelor întregi de n variabile $\alpha, \beta, .. \lambda$ cu coificienţi *numerici* oarecari. Se poate stabili o corespondenţă biunivocă între corpurile K şi k; în adevăr, e deajuns de a face să corespundă fiecărei funcţiuni din baza corpului K, o variabilă a corpului k, înmulţirii compuse în K, înmulţirea ordinară în k, iar operaţiunea adunării să corespundă cu ea însăşi.

Să lărgim acum corpul k introducând şi seriile întregi de variabilele $\alpha, \beta, .. \lambda$, nule *în punctul* $\alpha=\beta=\gamma= .. = \lambda=o$. Prin corespondenţa precedentă, se va obţine în corpul K, deasemenea nişte serii de funcţiuni permutabile. Or, în virtutea inegalităţii evidente:

$$P_n(xy) \leq \frac{P(x-y)^n}{n!} \quad | P(xy) | < P$$

rezultă că seriile astfel obţinnte în K, vor fi *toate, regulat convergente*, în tot intervalul a b.

Este evident acum că aceste serii se bucură de asemenea de proprietăţile *a, b, c* şi, prin urmare, ele pot intră în corpul K. Corpul astfel obţinut poate fi numit *corp integral întreg* al funcţiunilor de bază, A(xy), B(xy), ... L(xy).

Să considerăm acum o relaţiune oarecare analitică:

$$f(\alpha, \beta, .. \lambda) = o \quad [f(o, o .. o) = o]$$

rezolubilă cu ajutorul funcţiunii analitice regulate:

$$\alpha = \varphi(\beta, \gamma .. \lambda) \quad [\varphi(o, o .. o) = o]$$

Putem să conchidem *în virtutea corespondenţei* stabilite între corpurile K şi k, că ecuaţiunea integrală:

$$f(A, B .. L) = O$$

www.digibuc.ro

este rezolubilă prin formula:

$$A = \varphi(B, .. L)$$

22. **Aplicaţiuni.** Să luăm câteva exemple:

a) Să considerăm ecuaţiunea integrală a sâmburilor rezolvanţi a ecuaţiunii lui Voltera.

$$\mathcal{R}(xy) = N(xy) + \lambda \int_x^y N(xs)\mathcal{R}(sy)ds$$

Se ştie că $\mathcal{R}(xy)$ este permutabil cu $N(xy)$. Ecuaţiunea corespunzătoare a corpului analitic va fi atunci:

$$x = a + \lambda ax.$$

de unde $x = \frac{a}{1-\lambda a} = a + a^2\lambda + \ldots + a^{p+1}\lambda^p + \ldots$

Vom aveà deci,

$$\mathcal{R}(xy) = N(xy) + \lambda N_2(xy) + \ldots + \lambda^p N_{p+1}(xy) + \ldots$$

şi această serie este o funcţie întreagă de λ.

b) Să considerăm ecuaţiunea:

$$P_1(xy) = P(xy) + A(xy).$$

Ecuaţiunea corespunzătoare a câmpului analitic este:

$$x^2 = x + a$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

de unde se scoate:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} = a - a^2 - \ldots - \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-3)}{p!} 2^{p-1} a_p \ \ldots$$

ceeace ne dă imediat soluţiunea ecuaţiunii integrale.

$$P(xy) = A(xy) - A_1(xy) - \ldots - \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-3)}{p!} 2^{p-1} A_p(xy) - \ldots$$

Cealaltă soluţiune x_2 nu mai convine; în adevăr, ea dă o funcţiune care nu mai este permutabilă cu $A(xy)$, pentru că începe cu termenul constant 1.

c) Să tratăm în fine, împreună cu d-l Volterra, un exemplu de un gen cu totul diferit. Să considerăm funcţiunea:

$$V(x,y;\lambda) = \lambda A(xy) + \frac{\lambda^2}{2} A_2(xy) + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} A_n(xy) + \ldots$$

Aceasta este o funcţiune întreagă de λ; ea corespunde în k funcţiunii:

$$e^{\lambda a} - 1$$

www.digibuc.ro

Insă :

$$(e^{\lambda a}-1)(e^{\mu a}-1)=e^{a(\lambda+\mu)}-e^{\lambda a}-e^{\mu a}+1$$
$$=e^{a(\lambda+\mu)}-1-(e^{\lambda a}-1)-(e^{\mu a}-1).$$

Vom aveà, deci, imediat :

$$V(xy;\lambda+\mu)=V(xy;\lambda)+V(xy;\mu)+\int V(xs;\lambda)V(ys;\mu)ds$$

ceeace stabileşte pentru funcţiunea $V(xy;\lambda)$ *o teoremă de adiţiune integrală.*

23. **Funcţiuni permutabile într'un interval fix** [1]). Dacă două funcţiuni $A(xy)$ şi $B(xy)$ sunt astfel că

$$\int_a^b A(xs)B(sy)ds=\int_a^b B(xs)A(sy)ds$$

vom spune că ele sunt *permutabile în intervalul* a b.

Toate proprietăţile demonstrate la No. 1 a acestui paragraf sunt adevărate şi pentru această nouă clasă de funcţiuni, cum e foarte uşor de asigurat.

Se pot obţine rezultate analoage celor obţinute în cazul precedent, în modul următor : să considerăm corpul k de funcţiuni *întregi sau meromorfe în* λ şi care se anulează cu λ; să considerăm în acelaş timp, corpul k a funcţiunilor ce se obţin, înlocuind în funcţiunile k puterile lui λ prin puterile compuse a unei funcţiuni $A(xy)$.

Funcţiunile corpului k sunt asemenea funcţiuni întregi sau meromorfe de λ. Aceasta e o consecinţă imediată a primei teoreme a lui Fredholm. In adevăr, în virtutea teoremei d-lui Mittag-Leffler, expresiunea generală a unei clase generale de funcţiuni meromorfe de λ, este :

$$f(\lambda)+\sum_{q=1}^{\infty}\left[\frac{A_1}{a_q-\lambda}+\frac{A_2}{(a_q-\lambda)_2}+\ldots+\frac{A_m}{(a_q-\lambda)^m}+P_q(\lambda)\right]$$

unde $P_q(\lambda)$ înseamnă un polinom de λ, şi $f(\lambda)$ o funcţiune întreagă. In virtutea primei teoreme a d-lui Fredholm, funcţiunea corpului k care corespunde la $\frac{A_1}{a_q-\lambda}$, este funcţiunea meromorfă :

$$\frac{A_1}{a_q}\cdot\frac{D\left((xy);\frac{\lambda}{a_q}\right)}{D\left(\frac{\lambda}{a_q}\right)}$$

[1]) Funcţiuni permutabile de a doua specie după d-l Volterra.

www.digibuc.ro

De asemenea, funcţiunea care corespunde funcţiunii:

$\frac{1}{(a_q-\lambda)p}$ este, abstracţie făcând de un factor, derivata de ordinul p, în raport cu $\frac{\lambda}{a_q}$, a funcţiunii meromorfe precedente.

In fine, la o funcţiune întreagă de λ în k, corespunde în k, de asemenea o funcţiune întreagă în λ.

Teorema este astfel demonstrată. Rezultă de aici că *teorema generală* din No. 2, asupra rezolvirei ecuaţiilor integrale *este de asemenea valabilă în câmpul* K *a noilor funcţiuni*. Mai mult, soluţiunile sunt nişte funcţiuni meromorfe de λ.

24. **Extensiunea corpului K.** Se poate, în cele două cazuri, urmări mai departe analogia între corpurile K şi k, din punctul de vedere următor:

Dacă luăm o relaţiune algebrică:

$$F(xy) = o \quad (F(o, o) = o)$$

şi dacă ne găsim în cazul general, ciclele de determinări a lui y care se anulează pentru $x = o$, vor fi date prin teorema lui Puiseux, şi vom aveà pentru aceste funcţiuni desvoltări după puterile fracţionare a lui x.

E atunci locul a căutà analoagele în K a acestor funcţiuni. Prima problemă fundamentală de rezolvit va fi studiul ecuaţiunii integrale *binoame*:

$$P_n(xy) = A(xy)$$

Se va puteà în fine estinde mai departe corespondenţa între corpii K şi k, făcând să corespundă lui $\sqrt[n]{a}$, funcţiunea P (xy) care se poate însemnà prin simbolul $A^{\frac{1}{n}}(xy)$.

Acest punct de vedere sugerează, între altele şi o importantă analogie între teoria lui Puiseux pentru ecuaţiile algebrice şi teoria lui Fuchs pentru ecuaţiile diferenţiare lineare.

Ne vom mărginì pentru moment la această scurtă observaţie.

(Sfîrşit).

www.digibuc.ro

www.digibuc.ro